CAPITULO I

CARGAS ELÉCTRICAS Y LEY DE COULOMB

1.1 INTRODUCCIÓN

Se inicia un estudio sistemático donde se analizarán las propiedades y consecuencias de uno de los atributos que poseen las partículas: la carga eléctrica. Dos cuerpos que poseen esta propiedad ejercen entre sí una fuerza electromagnética.

Si la partícula cargada está en reposo, los fenómenos asociados son estudiados por la parte de la física llamada Electrostática.

El interés de la electrostática está no solo en describir las características de una de las fuerzas fundamentales de la naturaleza, sino también en que facilita la comprensión de sus aplicaciones tecnológicas

Existe semejanza entre la fuerza gravitatoria y la fuerza electromagnética, pero también hay diferencias notables, las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas, mientras que las fuerzas electromagnéticas ejercidas entre dos cuerpos cargados a veces son de atracción y a veces de repulsión, esto depende del tipo de cargas eléctricas en cada cuerpo.

En este capítulo se presenta las propiedades de las cargas eléctricas, las distintas formas de generar cuerpos eléctricamente cargados y la ley de Coulomb que describe cuantitativamente la interacción entre dos cargas, después, se extiende la interacción para distribuciones discretas.

1.2 CARGAS ELÉCTRICAS

1.2.1 Propiedades de la carga eléctrica

La carga eléctrica se presenta en la naturaleza en dos formas, arbitrariamente se las denominó con signos: negativas y positivas.

Si una barra de ámbar (de caucho o de plástico) se frota con un paño de lana, se "electriza". Lo mismo sucede si una varilla de vidrio se frota con un paño de seda. Aún cuando ambas varillas pueden atraer objetos ligeros, como hilos o trocitos de papel, la propiedad eléctrica adquirida por frotamiento no es equivalente en ambos casos. Así, puede observarse que dos barras de ámbar electrizadas (electricidad negativa (-)) se repelen entre sí, y lo mismo sucede en el caso de que ambas sean de vidrio (electricidad positiva (+)). Sin embargo, la barra de ámbar es capaz de atraer a la de vidrio y viceversa.

La carga eléctrica total de un sistema cerrado se conserva.

Cuando se frota la barra de vidrio con el paño de seda, se observa que tanto la barra como el paño se electrizan ejerciendo por separado fuerzas de diferentes sentidos sobre un tercer cuerpo cargado. Pero, si una vez efectuada la electrización se envuelve la barra con el paño de seda, no se aprecia fuerza alguna sobre el cuerpo anterior. Ello indica que a pesar de estar electrizadas sus partes, el conjunto paño - barra se comporta como si no lo estuviera, manteniendo una neutralidad eléctrica.

Este hecho puede ser interpretado introduciendo el principio de conservación de la carga, según el cual cuando un cuerpo es electrizado por otro, la cantidad de electricidad que recibe uno de los cuerpos es igual a la que cede el otro, pero en conjunto no hay producción neta de carga. En términos de cargas positivas y negativas ello significa que la aparición de una carga negativa en el vidrio va acompañada de otra positiva de igual magnitud en el paño de lana o viceversa, de modo que la suma de ambas es cero.

La carga eléctrica está cuantificada.

Un átomo de cualquier sustancia está constituido, en esencia, por una región central o núcleo y una envoltura externa formada por electrones.

El núcleo está formado por dos tipos de partículas, los protones, dotados de carga eléctrica positiva, y los neutrones, sin carga eléctrica aunque con una masa semejante a la del protón. Tanto unos como otros se hallan unidos entre sí por efecto de unas fuerzas mucho más intensas que las de la repulsión electrostática - las fuerzas nucleares- formando un todo compacto. Su carga total es positiva debido a la presencia de los protones.

Los electrones son partículas mucho más ligeras que los protones y tienen carga eléctrica negativa. La carga de un electrón es igual en magnitud, aunque de signo contrario, a la de un protón. Las fuerzas eléctricas atractivas que experimentan los electrones respecto del núcleo, hace que éstos se muevan en torno a él en una situación que podría ser comparada, en una primera aproximación, a la de los planetas girando en torno al Sol, por efecto en este caso de la atracción gravitatoria. El número de electrones en un átomo es igual al de protones de su núcleo correspondiente, de ahí que en conjunto y a pesar de estar formado por partículas con carga, el átomo completo resulte eléctricamente neutro.

La carga del electrón (o del protón) constituye el valor mínimo e indivisible de cantidad de electricidad. Es, por tanto, la carga elemental y por ello constituye una unidad natural de cantidad de electricidad. Cualquier otra carga equivaldrá a un número entero de veces la carga del electrón. El coulomb (C) es la unidad de carga eléctrica en el Sistema Internacional y equivale $6{,}27.10^{18}$ veces la carga del electrón (e^-), recíprocamente $e = 1{,}6.10^{-19}$ C.

1.3 ELECTRIZACIÓN

Cuando un cuerpo adquiere propiedades eléctricas se dice que ha sido electrizado, esto significa que por algún proceso ha ganado o perdido cargas eléctricas. Dentro de estos procesos están:

1.3.1 La electrización por frotamiento

Se explica del siguiente modo. Por efecto de la fricción, los electrones externos de los átomos del paño de lana son liberados y cedidos a la barra de ámbar, con lo cual ésta queda cargada negativamente y aquel positivamente. En términos análogos puede explicarse la electrización del vidrio por la seda. En cualquiera de estos fenómenos se pierden o se ganan electrones, pero el número de electrones cedidos por uno de los cuerpos en contacto es igual al número de electrones aceptado por el otro, de ahí que en conjunto no hay producción ni destrucción de carga eléctrica.

1.3.2 La electrización por contacto

Es considerada como la consecuencia de un flujo de cargas negativas de un cuerpo a otro. Si el cuerpo cargado es positivo es porque sus correspondientes átomos poseen un defecto de

electrones, que se verá en parte compensado por la aportación del cuerpo neutro cuando ambos entran en contacto. El resultado final es que el cuerpo cargado se hace menos positivo y el neutro adquiere carga eléctrica positiva. Aún cuando en realidad se hayan transferido electrones del cuerpo neutro al cargado positivamente, todo sucede como si el segundo hubiese cedido parte de su carga positiva al primero. En el caso de que el cuerpo cargado inicialmente sea negativo, la transferencia de carga negativa de uno a otro corresponde, en este caso, a una cesión de electrones.

1.3.3 La electrización por influencia

Es un efecto de las fuerzas eléctricas. Debido a que éstas se ejercen a distancia, un cuerpo cargado positivamente en las proximidades de otro neutro atraerá hacia sí a las cargas negativas, con lo que la región próxima queda cargada negativamente. Si el cuerpo cargado es negativo entonces el efecto de repulsión sobre los electrones atómicos convertirá esa zona en positiva. En ambos casos, la separación de cargas inducida por las fuerzas eléctricas es transitoria y desaparece cuando el agente responsable se aleja suficientemente del cuerpo neutro.

1.4 CONDUCTORES Y AISLADORES

Por ahora, se van a definir dos tipos de materiales[1]:

Conductores: son aquellos materiales que poseen cargas libres.

Aisladores o no conductores: no tiene cargas libres

Es obvio, que existen otros tipos de materiales, de ellos se analizará y estudiará más adelante

1.5 LEY DE COULOMB

Charles Coulomb (1736-1806) basado en la balanza de torsión de Cavendich desarrolló un método de medida de fuerzas sensible a pequeñas magnitudes que lo aplicó al estudio de las interacciones entre pequeñas esferas cargadas. El resultado final de esta experiencia permitió la descripción cuantitativa de las fuerzas de interacción entre cuerpos cargados.

La intensidad de las fuerzas atractivas o repulsivas que ejercen entre sí dos cuerpos cargados (supuestos puntuales) resultan ser directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, dependiendo además dicha fuerza de la naturaleza del medio que les rodea. Las fuerzas eléctricas se aplican en los respectivos centros de las cargas y están dirigidas a lo largo de la recta que los une.

La expresión matemática de la ley de Coulomb es

$$\vec{F} = K\frac{qQ}{r^2}\vec{r}_o \qquad (1.1)$$

Donde q y Q corresponden a los valores de las cargas (medidas en coulomb) que interaccionan tomadas con su signo positivo o negativo, r representa la distancia (medida en m) que las separa supuestas concentradas cada una de ellas en un punto y K es la constante de proporcionalidad

[1] Es evidente que en la naturaleza existen más tipos de materiales, esta es solo una descripción extremadamente elemental de los mismos

correspondiente que depende del medio en que se hallen dichas cargas y del sistema de unidades. El versor $\vec{r}_o$ representa la orientación de la fuerza a lo largo de la recta que une ambas cargas. En este caso, se emplea el SI.

El hecho de que las cargas aparezcan con su signo propio en la ecuación anterior da lugar a la existencia de dos posibles sentidos para la fuerza F, lo cual puede ser interpretado como dos tipos de fuerzas: atractivas y repulsivas, que son características de la interacción electrostática. Así, cargas con signos iguales darán lugar a fuerzas repulsivas (figura 1(a)), en tanto que cargas con signos diferentes experimentarán fuerzas atractivas (figura 1(b)).

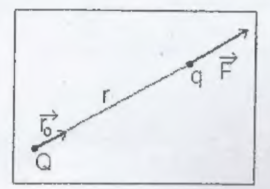


Figura 1(a): La fuerza sobre q debido a la carga Q, está a lo largo de la recta que une ambas cargas, el versor $\vec{r}_o$ está dirigido desde la carga Q hacia la carga q. Se dibuja solo la fuerza sobre q, pero también existe una fuerza igual, pero de sentido contrario sobre Q

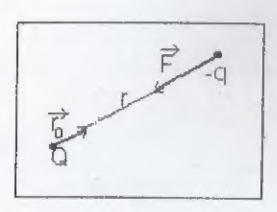


Figura 1(b): La fuerza sobre -q debido a la carga Q, está a lo largo de la recta que une ambas cargas, pero de sentido contrario al caso mostrado en la figura anterior, Nótese que el versor $\vec{r}_o$ está dirigido desde la carga Q hacia la carga
–q. Se dibuja solo la fuerza sobre q, pero también existe una fuerza igual, pero de sentido contrario sobre Q

La constante de proporcionalidad K, en el sistema SI en el vacío, tiene un valor igual a

$$K = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} = 8.89\ 10^9\ \frac{N\,m^2}{C^2} \qquad (1.2)$$

donde $\varepsilon_o = 8.85 10^{-12}\ \frac{C^2}{N\,m^2}$ representa la permitividad eléctrica en el vacío

con este valor de la constante K la intensidad de las fuerzas electrostáticas se hace muy grande comparada por ejemplo, con las fuerzas gravitatorias.

Además se ha comprobado experimentalmente que si las cargas *q* y Q se sitúan en un medio distinto del aire, la magnitud de la fuerza de interacción se ve afectada. Así, por ejemplo, en el agua pura la intensidad de la fuerza electrostática entre las mismas cargas, situadas a igual distancia, se reduce en un factor de 1/81 con respecto de la que experimentaría en el vacío. La constante *K* traduce, por tanto, la influencia del medio.

Una cuestión realmente significativa es la dependencia de la intensidad de la fuerza eléctrica con respecto a la inversa del cuadrado de la distancia que separa las cargas. Ese cuadrado surge de la evidencia experimental y no de otra cosa, hasta ahora fue probada su validez experimental dentro del rango de distancias 10^{-16} metros $\leq r \leq 10^8$ metros, esto significa 24 órdenes de magnitud.

Y lo otro, también significativo, es que la interacción entre cargas se produce "a distancia" es decir, que no es necesario que los cuerpos cargados estén en contacto.

1.6 LIMITACIONES DE LA LEY DE COULOMB

- Es válida para cargas puntuales.

- La interacción a distancia ocurre instantáneamente (¿parece que la acción entre carga ocurre a velocidad infinita?)

Estas cuestiones se resolverá más adelante.

1.7 APLICACIONES

Ejercicio 1

Comparar la fuerza de gravitación universal y la fuerza de Coulomb.

$$\vec{F}_G = -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{r}_o \qquad \vec{F}_E = K \frac{qQ}{r^2} \vec{r}_o$$

Esta analogía no supone una identidad entre la naturaleza de ambos tipos de fuerzas, solo indica que los fenómenos de interacción entre cargas y los de interacción entre masas podrán ser estudiados y tratados de un modo similar. A pesar de esta analogía formal, existen algunas diferencias que cabe destacar. La primera se refiere al valor de las constantes G y K. El valor de G resulta ser mucho menor que K:

$$\gamma = 6.67\ 10^{-11} \frac{N m^2}{Kg^2} \qquad K = 8.98\ 10^9 \frac{N m^2}{C^2}$$

Por tal motivo, las fuerzas entre cargas serán mucho más intensas que las fuerzas entre masas para cantidades comparables de una y otra magnitud. Además, las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas, mientras que las eléctricas pueden ser atractivas o repulsivas en función de los signos de las cargas que interactúan.

Ejercicio 2

Un átomo de hidrógeno está formado por un protón y un electrón que se mueve en torno a él. La intensidad de la fuerza atractiva que experimentan es igual a 8,2 10^{-18} N. Determinar el valor de la distancia media que los separa (radio de Bohr).

$$\vec{F}_E = K \frac{qQ}{r^2} \vec{r}_o \Rightarrow r = \sqrt{\frac{KqQ}{F_E}} = 2.8.10^{11} \text{ m}$$

Ejercicio 3

Encuentre las componentes de la fuerza sobre la carga puntual q_o debido a la carga Q, el módulo y la orientación, sabiendo que la posición de la carga q_o es (x_o, y_o) y de Q es (x, y). Ver figura 2.

$$F_x = \frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q\ (x_o - x)}{\left[(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2\right]^{3/2}}$$

$$F_y = \frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q\ (y_o - y)}{\left[(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2\right]^{3/2}}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad \cos(\theta) = \frac{F_x}{F}$$

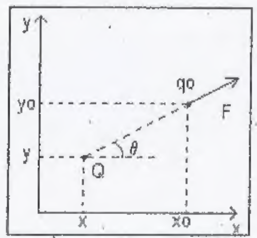


Figura 2: Fuerza entre cargas

1.8 PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Cuando existe en la región un conjunto de cargas puntuales q_i (con i = 1....N) que interactúan con una carga q_o, la interacción de cada una de ellas con q_o es independiente de las otras, esto permite que la fuerza total sobre q_o sea la suma vectorial de las interacciones, esto es

$$\vec{F}_o = \vec{F}_{o1} + \vec{F}_{o2} + ... + \vec{F}_{oN} = \sum_i \vec{F}_{oi} = Kq_o \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_{oi} \qquad (1.3)$$

donde $\vec{F}_{oi}$ representa la fuerza sobre q_o debido a la carga q_i y r_i es la distancia entre la posición de la carga q_o y la de la carga q_i y $\vec{r}_{oi}$ es el versor que define la orientación.

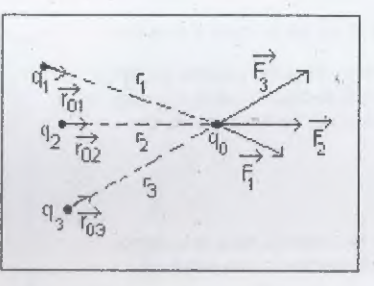


Figura 3: Superposición de fuerzas sobre la carga q o

Por lo tanto, la fuerza neta debida a muchas cargas puntuales sobre la carga q_o es exactamente la superposición de las fuerzas de cada carga aislada.

En el caso de conocer las coordenadas espaciales de cada carga q_i y de q_o, es decir (x_i, y_i, z_i) y (x_o, y_o, z_o), será posible expresar la (1.3), en términos de sus componentes como

$$F_x = \frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i\,(x_o - x_i)}{\left[(x_o - x_i)^2 + (y_o - y_i)^2 + (z_o - z_i)^2\right]^{3/2}} \qquad (1.4.1)$$

$$F_y = \frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i\,(y_o - y_i)}{\left[(x_o - x_i)^2 + (y_o - y_i)^2 + (z_o - z_i)^2\right]^{3/2}} \qquad (1.4.2)$$

$$F_z = \frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i\,(z_o - z_i)}{\left[(x_o - x_i)^2 + (y_o - y_i)^2 + (z_o - z_i)^2\right]^{3/2}} \qquad (1.4.3)$$

el módulo y la orientación de la fuerza se obtiene mediante

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (1.5)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{F_x}{F} \qquad \cos(\beta) = \frac{F_y}{F} \qquad \cos(\gamma) = \frac{F_z}{F} \qquad (1.6)$$

1.9 APLICACIÓN

Ejercicio 4

Calcule la fuerza electrostática sobre la carga Q_0 debido a la presencia de las cargas Q y Q_2 como muestra la figura 4 a.

Datos:

$Q_0 = 1$ C, $Q_1 = 2$ C, $Q_2 = 2$ C,

$x_0 = 1$ m, $y_0 = 1$ m

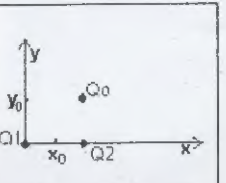


Figura 4 a

Las coordenadas de

Q_o son (x_o, y_o) Q_1 son $(0, 0)$ Q_2 son $(x_o, 0)$

La componente de la fuerza en x es

$$F_x = \frac{Q_o}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{2}\frac{Q_i\,(x_o - x_i)}{\left[(x_o - x_i)^2 + (y_o - y_i)^2\right]^{3/2}} = 6.36\,x10^9\,N$$

$$F_y = \frac{Q_o}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{2}\frac{Q_i\,(y_o - y_i)}{\left[(x_o - x_i)^2 + (y_o - y_i)^2\right]^{3/2}} = 2.43x10^{10}\,N$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2.51x10^{10}\,N$$

$$\theta = \frac{180}{\pi}arctg\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = 75.3°$$

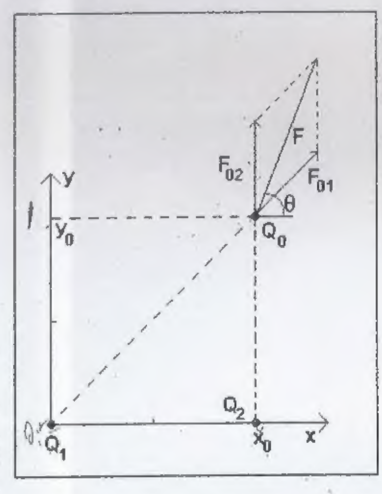


Figura 4 b

En la figura 4 b se muestra un esquema de las fuerzas que actúan sobre la carga Q_o y se obtiene la fuerza resultante empleando la regla del paralelogramo. La orientación de la fuerza resultante forma un ángulo θ con el eje horizontal. Los vectores no están hechos a escala

EXPERIENCIAS DE ELECTROSTÁTICA

1.- Induciendo una carga positiva en una esfera

En el proceso de inducción, un objeto cargado se coloca cerca, pero sin tocar, a una esfera conductora neutra. La presencia del objeto cargado cerca de la esfera conductora neutra forzará (o inducirá) a los electrones dentro del conductor a moverse (ver figura 5). El movimiento de los electrones producirá un desequilibrio de carga en lados opuestos del conductor neutro.

Figura 5

Figura 5.1 Figura 5.2 Figura 5.3

Figura 5.4 Figura 5.5

Mientras que la carga total de la esfera es neutra (es decir, tiene el mismo el número de electrones como de protones), hay un exceso de carga positiva en un lado de la misma y un exceso de carga negativa en el lado opuesto. Una vez que la carga ha sido separada en la esfera, se trae una "tierra" y se toca a uno de los lados. El lado tocado del objeto con la tierra presenta un flujo de electrones de la esfera a la "tierra". El flujo de los electrones da como resultado un exceso de carga positiva en la esfera que permanece cuando se retiran de las proximidades de la esfera el cuerpo cargado y la "tierra". En general, cuando un objeto es cargado por inducción, la carga recibida por el objeto es opuesta a la carga del objeto que fue usado para cargarlo.

2.- Cargando un sistema de dos esferas por inducción usando un objeto cargado negativamente

Dos esferas conductoras neutras descansan encima de soportes aislantes. Un cuerpo cargado negativamente se coloca cerca (sin tocar) a la esfera izquierda. La presencia del cuerpo cargado negativamente fuerza el movimiento de los electrones de la esfera izquierda hacia la esfera derecha. Este movimiento de electrones es meramente una reacción por la presencia del cuerpo cargado negativamente (semejante a la repulsión entre cargas). El resultado del movimiento de electrones a través de las esferas es que las esferas se han polarizado. Hay exceso de carga positiva en la esfera izquierda y un exceso de carga negativa en la esfera derecha. Cuando se separan las esferas y el objeto exterior cargado es alejado, las dos esferas exhiben un exceso de carga. La esfera izquierda tiene una carga positiva (del tipo opuesto de la carga del cuerpo exterior). La esfera derecha termina con una carga negativa (ver figura 6).

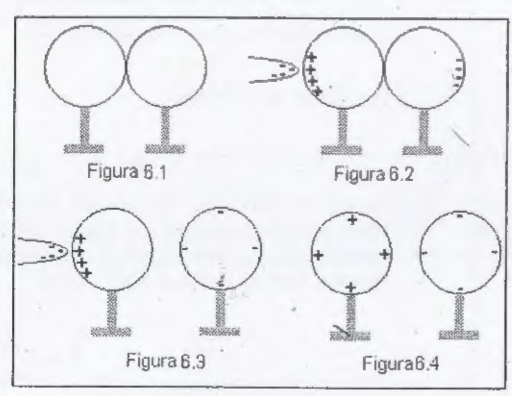


Figura 6

El proceso de inducción es diferenciado por las siguientes características generales:

- Se necesita un objeto cargado para cargar a otro objeto por inducción. No debe haber nunca un contacto entre el objeto cargado y el objeto a cargar.

- Solo conductores pueden ser cargados por el proceso de inducción. El proceso se basa en el hecho de que un objeto cargado puede forzar o puede inducir el movimiento de electrones sobre el material que será cargado.

- Los extremos del objeto que se cargan lo hacen con una carga que es opuesta de la carga del objeto que se usa para cargarlo.

- Una "tierra" debe usarse para crear la carga en el objeto. La tierra permite el movimiento de los electrones desde o hacia el objeto a cargar.

CUESTIONARIO

1. ¿Cuál es la carga eléctrica total en un sistema aislado?
2. Puede destruirse o crearse una carga eléctrica? Justifique.
3. ¿Qué diferencia existe entre un conductor y no conductor?
4. Empleando la ley de Coulomb haga una representación gráfica:
    a. F/q = F(r) con q constante.
    b. F/q = F(q) con r constante
5. ¿Cuáles son los valores numéricos y unidades de la constante de proporcionalidad en la ley de Coulomb en los distintos sistemas de unidades?
6. La fuerza electrostática ejercida entre dos cargas puntuales de igual (distinto) signo es una magnitud vectorial. Hacer un diagrama vectorial en cada caso.
7. Plantear el caso de la fuerza sobre una carga (positiva o negativa) producida por un conjunto de carga puntuales.
8. ¿Que significa que la fuerza de interacción entre cargas sea de "acción a distancia" ?
9. Una varilla cargada atrae pedacitos de polvo de corcho seco los cuales después de tocar la varilla, a menudo saltan disparados violentamente fuera de ella. Explique lo que ocurre.

PROBLEMAS

1. Calcule la intensidad de la fuerza electrostática que ejerce una carga de $Q = 10^{-9}$ C sobre otra carga de igual valor numérico y signo, cuando están distanciadas: a) r = 1 m, b) r = 0,5 m, c) r = 0,25 m, d) r = 0,125 m. Haga una representación gráfica de la fuerza en función de la distancia entre las cargas.

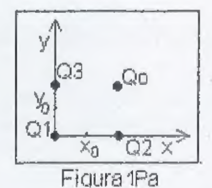


Figura 1Pa

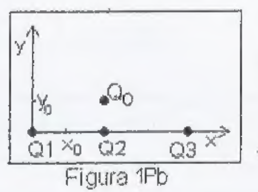


Figura 1Pb

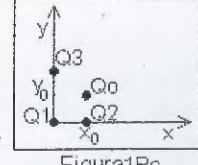


Figura1Pc

2. Calcule la intensidad de la fuerza electrostática que ejerce una carga Q_1 = 1 C sobre otra que está a r = 0,125 m, siendo su carga: a) $Q_2 = Q_1 / 2$, b) $Q_2 = Q_1$, c) $Q_2 = 2\ Q_1$, d) $Q_2 = 4\ Q_1$. Haga una representación gráfica de la fuerza en función de la carga.

3. Calcule la fuerza electrostática sobre la carga Q_0 debido a la presencia de las cargas Q_1, Q_2 y Q_3 como muestran las figuras 1Pa), 1Pb), 1Pc).

Datos: $Q_0 = 1$ C, $Q_1 = -2$ C, $Q_2 = 2$ C, $Q_3 = 1$ C, $x_0 = 1$ m, $y_0 = 1$ m

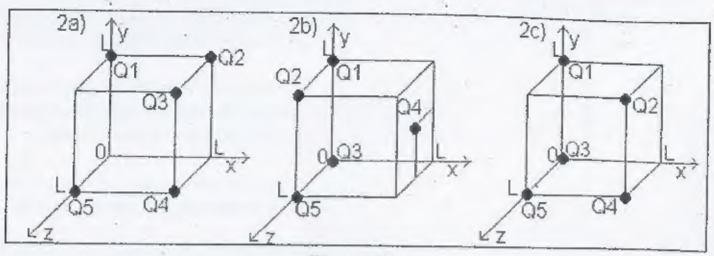


Figura 2P

4. Calcule la fuerza electrostática sobre la carga Q_1, según se indica en las figuras 2P a), b) y c). Datos: $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$ C, $Q_4 = Q_5 = 2$ C, $L = 0.2$ m.

5. Un átomo de hidrógeno está constituido por un núcleo (un protón) y un electrón girando en forma estable en una órbita. Se desea conocer la velocidad del electrón si el radio de la órbita es $0{,}528.10^{-8}$ cm. DATOS: $m_e = 9{,}11.10^{-31}$ Kg. y $q_p = -q_e = 1{,}610^{-19}$ C.

6. Una cierta carga Q se divide en dos partes +q y Q - q. ¿Cuál es la relación de Q a q si las dos partes separadas una cierta distancia deben producir una máxima repulsión coulombiana entre sí?

7. Tres cargas puntuales iguales de $Q = 1.10^{-4}$ C están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de 20 cm de lado. Calcular la fuerza que actúa sobre cada carga.

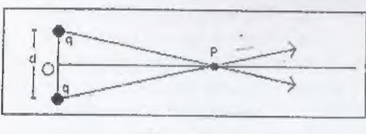


Figura 3P

8. Dos esferas cargadas iguales de dimensiones pequeñas y masa = 1 g, se hallan colgadas de un soporte mediante hilos de seda de 30 cm de longitud y penden de un punto en común. Cada hilo forma un ángulo de 5° con la vertical. Calcúlese el valor de las cargas.

9. Dos cargas puntuales idénticas de +q C están separadas por una distancia d (ver figura 3P). Calcular el trabajo por unidad de carga necesaria para traer a otra carga desde un punto muy alejado (infinito) y sobre el plano bisector de la línea que une las cargas, hasta el punto medio de dicha distancia.

CAPITULO 2

CAMPO ELÉCTRICO

2.1 INTRODUCCION

El desarrollo de los fenómenos electrostáticos conduce a la enunciación de la ley de Coulomb, la cual es revalidada cada vez que el hombre alcanza nuevos valores de energías o investiga regiones del universo no conocidas. Pero esta ley presenta algunas limitaciones:

- Es válida para cargas puntuales, es decir, se aplica estrictamente a cuerpos cargados cuyas dimensiones son pequeñas cuando se las compara con las distancias involucradas en el análisis.
- Introduce la acción a distancia, como una interacción del tipo instantáneo, esto significa que el proceso de interacción tendría lugar a velocidad infinita, contradiciendo lo actualmente conocido

La introducción del concepto de campo eléctrico busca, en principio, salvar estas limitaciones de la ley de Coulomb y por otro lado, realizar en forma más adecuada los cálculos de las fuerzas eléctricas.

2.2 CAMPO ELÉCTRICO

Se dice que existe un campo eléctrico en una región del espacio si sobre un cuerpo cargado eléctricamente colocado en esa región, actúa una fuerza de origen eléctrico (figura 1).

La intensidad del campo eléctrico se define como la fuerza por unidad de carga que actúa sobre una carga positiva colocada en ese punto (carga de prueba), esta carga debe ser lo suficientemente pequeña para no modificar, con su presencia, la distribución de cargas del lugar.

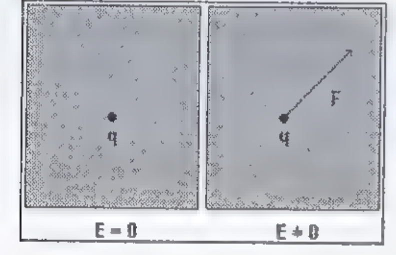


Figura 1

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad (2.1)$$

La unidad del campo es

$$[E] = \left[\frac{newton}{coulomb}\right] = \left[\frac{N}{C}\right]$$

Esta definición siempre es válida para cualquier valor de la carga de prueba siempre que las cargas que generan el campo puedan considerarse en reposo con la presencia de la carga de prueba, esto se puede expresar como

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} \qquad (2.2)$$

De lo expuesto surge que la carga de prueba debe ser positiva e infinitesimal.

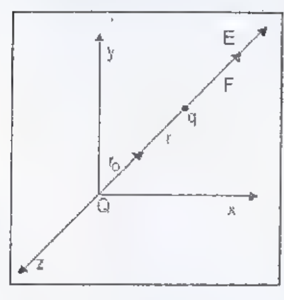


Figura 2

Si se consideran dos cargas puntuales una de valor Q y la otra q colocada en el punto P en el espacio, así como indica la figura 2. Las cargas están separadas una distancia r, de acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza eléctrica sobre q será

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qQ}{r^2}\vec{r_o} \qquad (2.3)$$

de acuerdo a la definición de campo dada por (2.1), el campo eléctrico producido por una carga puntual Q calculado en el punto P es

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}\vec{r_o} \qquad (2.4)$$

la carga Q es la fuente del campo eléctrico.

Notar que:

- El campo eléctrico es un vector orientado a lo largo de la recta que une la carga Q y el punto P y su sentido dependerá del signo de la carga fuente.
- La dirección y el sentido coinciden con la fuerza eléctrica que actuaría sobre una carga de prueba positiva localizada en ese punto.
- El campo eléctrico es únicamente una propiedad de la carga fuente y no depende para nada de la carga de prueba.
- Es una propiedad local, esto es, depende de la posición.
- La fuerza ejercida por una distribución de cargas ahora se puede calcular en dos pasos:
    1. Se calcula el campo eléctrico en la localización de la otra carga, o en forma genérica para cualquier punto $\vec{E}(\vec{r})$
    2. Se calcula luego la fuerza haciendo

$$\vec{F} = q_o\vec{E}(\vec{r}) \qquad (2.5)$$

donde q_o es la carga ubicada en el punto donde se calculó el campo.

La ventaja de este procedimiento es que una vez determinado el campo en un punto, basta multiplicar por la carga para determinar la fuerza, independientemente si esta es puntual o no. Para otra carga, de otro valor, solo hay que repetir el producto (2.5).

2.3 CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO PARA DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE CARGAS

Para calcular el campo eléctrico de un conjunto de N cargas puntuales se aprovecha el hecho de que las fuerzas eléctricas cumplen el principio de superposición lineal y entonces, (ver figura 3), es posible sumar vectorialmente todas las fuerzas ejercidas sobre la carga q_o entonces

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \ldots + \vec{F}_{0N} = \sum_{i=0}^{N} \vec{F}_{0i} \qquad (2.6)$$

usando la (2.3) se reemplaza

$$\vec{F}_o = \frac{q_o}{4\pi\,\varepsilon_o} \sum_{i=0}^{N} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_{oi} \qquad (2.7)$$

el campo eléctrico para una distribución discreta de cargas resulta

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_o}{q_o} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \sum_{i=0}^{N} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_{oi} \qquad (2.8)$$

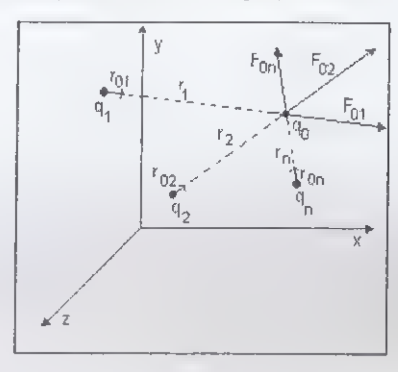


Figura 3

en caso de conocer las coordenadas espaciales de cada carga q_i, es decir (x_i, y_i, z_i), será posible expresar la (2.8), en términos de sus componentes como

$$E_x = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \sum_{i=0}^{N} \frac{q_i (x_o - x_i)}{\left[(x_o - x_i)^2 + (y_o - y_i)^2 + (z_o - z_i)^2\right]^{3/2}} \qquad (2.9.1)$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \sum_{i=0}^{N} \frac{q_i (y_o - y_i)}{\left[(x_o - x_i)^2 + (y_o - y_i)^2 + (z_o - z_i)^2\right]^{3/2}} \qquad (2.9.2)$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \sum_{i=0}^{N} \frac{q_i (z_o - z_i)}{\left[(x_o - x_i)^2 + (y_o - y_i)^2 + (z_o - z_i)^2\right]^{3/2}} \qquad (2.9.3)$$

donde las coordenadas (x_o, y_o, z_o) son las del punto donde se calcula el campo.

2.4 DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

Las cargas pueden distribuirse por sí mismas en una línea, con densidad lineal de carga λ (C/m), en una superficie, con densidad superficial σ (C / m^2) o en un volumen con densidad volumétrica ρ (C / m^3).

En la figura 4, se muestran las distribuciones continuas mencionadas. Por lo tanto, es posible elegir una carga libre dq, de tamaño diferencial, dentro de la distribución macroscópica de carga en una línea (figura 4.1), en una superficie (figura 4.2) o en un volumen (figura 4.3) y entonces calcular la carga total efectuando una integración sobre la región que ocupa la carga.

$$dq = \begin{cases} \lambda\, dl \\ \sigma\, dS \\ \rho\, dv \end{cases} \Rightarrow q = \begin{cases} \int_L \lambda\, dl \\ \iint_S \sigma\, dS \\ \iiint_V \rho\, dv \end{cases} \qquad (2.10)$$

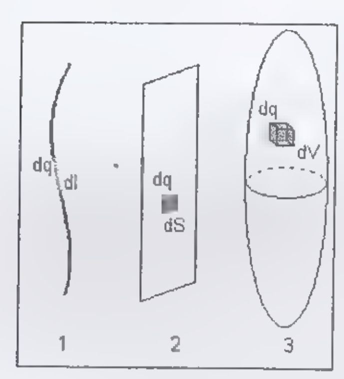


Figura 4: Distribuciones de cargas. 1Lineal.2 Superficial. 3 Volumétrica

2.5 CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO PARA DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

Si se considera una región del espacio en la que está distribuida una carga Q, con una densidad volumétrica definida por ρ= dQ / dV, se busca calcular el campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto P, donde está localizada la carga q_o.

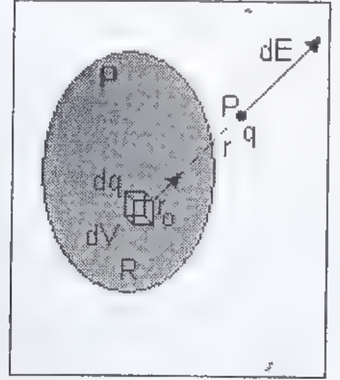


Figura 5

Es posible dividir la distribución de cargas en elementos de cargas infinitesimales dQ, como muestra la figura 5. Cada carga infinitesimal puede ser considerada como una carga puntual, entonces empleando la (2.4) resulta

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dQ}{r^2}\vec{r_o} \qquad (2.11)$$

para determinar el campo debido a toda la distribución de carga se debe sumar las contribuciones individuales de cada carga infinitesimal, lo que se logra haciendo la integral sobre la región R del espacio donde está la carga Q.

$$\vec{E} = \int_R \vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_R \frac{dQ}{r^2}\vec{r_o} \qquad (2.12)$$

Esta expresión es semejante a la (2.8).

2.5.1 Ejemplos de cálculos de campos eléctricos creados por distintas distribuciones de cargas

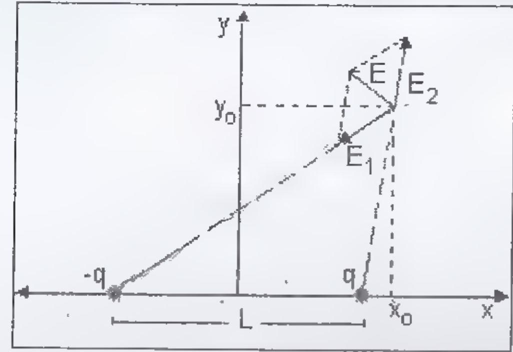


Figura 6

Ejemplo 1

Caso: dos cargas puntuales de igual valor y de signo contrario Una distribución de este tipo (figura 6) recibe el nombre de dipolo eléctrico, las cargas están separadas una distancia L. Entonces las componentes del campo en el punto (x_o, y_o) serán

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{q(x_o + L/2)}{\left[(x_o + L/2)^2 + y_o^2\right]^{3/2}} + \frac{q(x_o - L/2)}{\left[(x_o - L/2)^2 + y_o^2\right]^{3/2}}\right] \qquad (2.13.1)$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{q\,y_o}{\left[(x_o + L/2)^2 + y_o^2\right]^{3/2}} + \frac{q\,y_o}{\left[(x_o - L/2)^2 + y_o^2\right]^{3/2}}\right] \qquad (2.13.2)$$

considerando que el punto está en (0, y_1) como se muestra en la figura 7, entonces las expresiones (2.13.1) y (2.13.2) se reducen a

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{q(L/2)}{\left[(L/2)^2 + y_o^2\right]^{3/2}} - \frac{q(L/2)}{\left[(L/2)^2 + y_o^2\right]^{3/2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qL}{\left[(L/2)^2 + y_o^2\right]^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{q\,y_o}{\left[(L/2)^2 + y_o^2\right]^{3/2}} + \frac{q\,y_o}{\left[(L/2)^2 + y_o^2\right]^{3/2}}\right] = 0$$

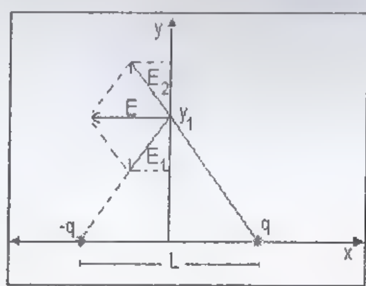


Figura 7

Por lo tanto, el campo eléctrico en este punto es

$$\vec{E} = E_x\,\vec{i} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qL}{\left[(L/2)^2 + y_o^2\right]^{3/2}}\,\vec{i}$$

Al producto q.L se llama momento dipolar eléctrico p, se le asigna naturaleza vectorial indicando su orientación desde la carga negativa a la positiva, esto es

$$\vec{p} = q\,\vec{L}$$

Ejemplo 2

Cálculo del campo eléctrico creado por un hilo con densidad lineal de carga λ uniforme, en un punto del plano mediatriz a una distancia a del hilo. Figura 8.

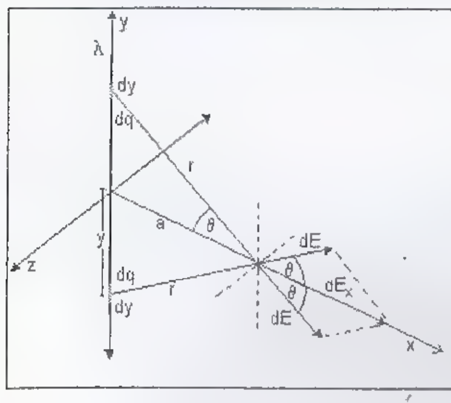


Figura 8

Considerando un elemento infinitesimal de longitud del hilo dy, tendrá asociadauna carga infinitesimal dada por dq = λdy. Usando la expresión (2.11), y por la simétrica de la distribución, resulta

$$dE_x = \frac{2}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{\lambda\,dy}{r^2}\cos(\theta) \qquad (2.14)$$

de la figura 8 se desprende que y, r y θ son variables dependientes entre sí, es conveniente entonces, tomar solo una ellas como independiente, se elige θ entonces se puede expresar las demás en función de ella

$$tg(\theta) = \frac{y}{a} \quad \Rightarrow \quad y = a\,tg(\theta) \quad , \quad dy = a\sec^2(\theta)d\theta$$

$$r = \frac{a}{\cos(\theta)} \quad \Rightarrow \quad r = a\sec(\theta)$$

reemplazando en (2.14), resulta

$$dE_x = \frac{2}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{\lambda\,dy}{r^2}\cos(\theta) = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon_o}\frac{\lambda\,a\sec^2(\theta)d\theta}{a^2\sec^2(\theta)}\cos(\theta) \qquad (2.15)$$

$$dE_x = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon_o}\frac{\lambda}{a}\cos(\theta)d\theta \qquad (2.16)$$

Para obtener el campo total se debe integrar a lo largo del hilo, por lo tanto, los límites de integración son 0 y π/2.

$$E_x = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon_o}\frac{\lambda}{a}\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon_o}\frac{\lambda}{a} \qquad (2.17)$$

La intensidad del campo depende de la densidad de carga λ y de la distancia del hilo al punto, a. La dirección del campo es radial, como muestra la figura 8, o de manera equivalente se puede decir que es perpendicular al eje del hilo cargado y el sentido depende del signo de la carga, en este caso como es positivo es saliente.

Ejemplo 3

Cálculo del campo eléctrico creado por una superficie plana con densidad superficial de carga uniforme σ, en un punto del plano mediatriz a una distancia a de la superficie. Ver figura 9.

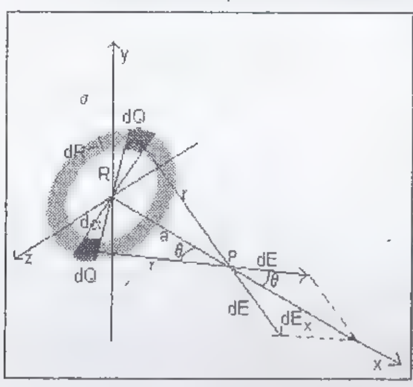


Figura 9

Considerando un elemento infinitesimal superficial de la misma dS, tendrá asociada una carga infinitesimal dada por dQ = dS. Usando la expresión (2.11), y por la simetría de la distribución resulta

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{\sigma\, dS}{r^2}\cos(\theta) \qquad (2.18)$$

Si se toma un disco como muestra la figura 9, de radio interior R y radio exterior R + dR y un arco elemental en el mismo se puede expresar el elemento de superficie como

$$dS = R\, d\alpha\, dR$$

la distancia $r = \sqrt{R^2 + a^2}$ y $\cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}$

entonces la (2.18), puede expresarse

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{\sigma\, R\, d\alpha\, dR}{R^2 + a^2}\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{\sigma\, a\, R\, d\alpha\, dR}{\left[R^2 + a^2\right]^{3/2}} \qquad (2.19)$$

integrando para toda la superficie, esto significa

$$E_x = \iint_S dE_x = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{\sigma\, a\, R\, dR\, d\alpha}{\left[R^2 + a^2\right]^{3/2}} = \frac{\sigma\, a}{4\pi\,\varepsilon_o}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty \frac{R\, dR}{\left[R^2 + a^2\right]^{3/2}} \qquad (2.20)$$

haciendo las integrales se obtiene

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \qquad (2.21)$$

Se puede concluir que el campo creado por una superficie plana infinita, cargada uniformemente, **produce un campo eléctrico independiente de la posición,** con dirección perpendicular al plano de la misma y de sentido saliente (si la carga es positiva).

Es posible también, de la expresión (2.20), obtener el campo creado por un disco de radio R o en el eje del disco, para eso, basta integrar R desde 0 a R o, **(se deja como ejercicio)**.

En el caso, en que se coloque en forma paralela, dos superficies planas con densidades superficiales de cargas y - uniformes separadas por una distancia d, se puede demostrar **(se deja como ejercicio)** que el campo entre las superficies, es constante y tiene una intensidad de

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \qquad (2.22)$$

y que en el exterior el campo es nulo.

Para visualizar el espectro del campo eléctrico asociado con una distribución de carga particular, Michael Faraday (1791-1867) introdujo el concepto de líneas de fuerzas.

- Una línea de fuerza es una línea imaginaria orientada, que se traza de modo que la tangente en un punto coincide con la dirección del campo eléctrico en ese punto.
- Tiene como fuente las cargas positivas y como sumidero las cargas negativas.
- La densidad de líneas (número de líneas por unidad de superficie) es proporcional a la intensidad del campo.

A partir de estas propiedades de la línea de fuerza es posible desarrollar un procedimiento para encontrar analíticamente la familia de curvas correspondiente.

Para el análisis se toma una línea de fuerza que pertenezca a un plano y se usa coordenadas cartesianas, de acuerdo con la propiedad de que la tangente a la curva en un punto coincide con la dirección del campo se puede establecer una relación entre la curva que representa la línea de fuerza y las componentes del campo.

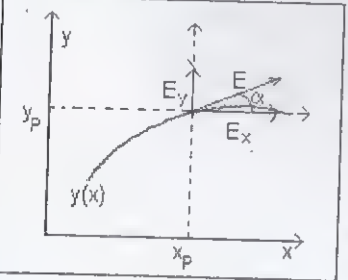


Figura 10

Si y(x) es la función que representa la línea de fuerza figura 10, en el punto (x_p, y_p) la tangente viene dada por

$$tg(\alpha) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_p, y_p)} \qquad (2.23)$$

Por otro lado, el ángulo que forma el campo respecto del eje x se puede determinar mediante la tangente (como se muestra en la figura 10 y se calcula a partir de las componentes del campo eléctrico en ese punto, esto es

$$tg(\alpha) = \left.\frac{E_y}{E_x}\right|_{(x_p, y_p)} \qquad (2.24)$$

por lo tanto combinando (2.23) y (2.24) resulta

$$tg(\alpha) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_p, y_p)} = \left.\frac{E_y}{E_x}\right|_{(x_p, y_p)} \qquad (2.25)$$

de donde surge la relación

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} \qquad (2.26)$$

Como se puede reconocer, si se conoce las componentes de los campos de las coordenadas (x, y) la (2.26) puede permitir obtener la expresión analítica de la función y(x) que representa la línea de fuerza o bien la familia de líneas de fuerzas.

En caso de tratarse de una línea de fuerza en tres dimensiones, la expresión (2.26) se puede extender incorporando la componente en z, esto es.

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \qquad (2.27)$$

Si el sistema de coordenadas empleado es polar será la (2.26)

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\theta}{E_\theta} \qquad (2.28)$$

Ejemplo 1

Hallar las líneas de fuerza creadas por una carga puntual q localizada en el origen de coordenadas.

La (2.26) puede rescribirse

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} \qquad (2.29)$$

y considerando que las componentes del campo eléctrico de la carga puntual son

$$E_x = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{x}{\left[x^2+y^2\right]^{3/2}} \qquad (2.30.1)$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{y}{\left[x^2+y^2\right]^{3/2}} \qquad (2.30.2)$$

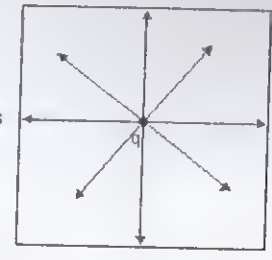


Figura 11

reemplazando en la (2.29) y haciendo las reducciones necesarias resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \qquad (2.31)$$

luego de la integración indefinida resulta

$$y(x, C) = C\,x \qquad (2.32)$$

A la constante de integración C, al ser genérica, se le puede asignar diferentes valores con lo cual se construye una familia de rectas, que pasan por el origen y que representan las líneas de fuerzas creadas por la carga puntual (ver figura 11).

Ejemplo 2

Hallar las líneas de fuerza creadas por un dipolo $\vec{p}$. Las componentes del campo eléctrico de un dipolo en coordenadas polares son

$$E_r(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{2\cos(\theta)}{r^3} \qquad (2.33.1)$$

$$E_\theta(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{sen(\theta)}{r^3} \qquad (2.33.2)$$

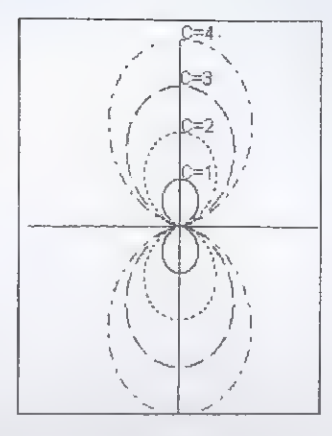


Figura 12

empleando la (2.28) se tiene

$$\frac{dr}{\frac{p}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{2\cos(\theta)}{r^3}} = \frac{r\,d\theta}{\frac{p}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{sen(\theta)}{r^3}} \qquad (2.34)$$

separando las variables resulta

$$\frac{dr}{r} = 2\frac{\cos(\theta)\,d\theta}{sen(\theta)} \qquad (2.35)$$

luego de la integración se tiene

$$r(\theta) = C\,sen^2(\theta) \qquad (2.36)$$

La figura 12 ilustra la familia de curvas que cumplen con (2 36) para diferentes valores de C, cada curva sale del extremo positivo del dipolo y llegan al extremo negativo del mismo.

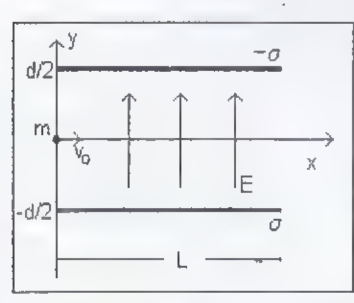


Figura 13

2.7 MOVIMIENTO DE CARGAS ELÉCTRICAS EN CAMPOS ELÉCTRICOS UNIFORMES

Se ha visto que es posible producir campos eléctricos uniformes en el espacio mediante distribuciones de cargas planas con densidad superficial constante (2.22). Por lo tanto, considerando dos placas planas con densidades de cargas σ y - σ separadas por una distancia d y de ancho L - si se desprecia los efectos de bordes[2].

Si se lanza un portador de carga q y masa m con velocidad $\vec{v}_o$, paralela a los planos. Desde un extremo y en la mitad de la separación (como muestra la figura 13).

Al ingresar el portador en el campo eléctrico existente entre las placas, sufrirá la acción de una fuerza. Si se considera un sistema de referencia (x, y) tal que el eje x sea paralelo a los planos y el eje y perpendicular (como muestra la figura 13), se puede expresar las fuerzas por componentes y deducir las ecuaciones paramétricas del movimiento del portador en ese campo.

$$F_x = 0 \qquad (2.37.1)$$

$$F_y = q\,E = \frac{q\sigma}{\varepsilon_o} \qquad (2.37.2)$$

de donde se obtienen las aceleraciones

$$a_x = \frac{F_x}{m} = 0 \qquad (2.38.1) \qquad\qquad a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{q\,E}{m} = \frac{q\sigma}{m\varepsilon_o} \qquad (2.38.2)$$

[2] Los efectos de bordes puede evitarse usando un ***anillo de guarda***.

Para hallar las velocidades se considera que en el instante t = 0 se tiene $v_x = v_o$ y $v_y = 0$, entonces

$$v_x = v_o \qquad (2.39.1) \qquad\qquad v_y(t) = a_y\, t = \frac{q\sigma}{m\varepsilon_o} t \qquad (2.39.2)$$

Las coordenadas de la posición del portador en función del tiempo, si partió del origen:

$$x(t) = v_o\, t \qquad (2.40.1) \qquad\qquad y(t) = \frac{1}{2} a_y\, t^2 = \frac{q\sigma}{2m\varepsilon_o} t^2 \qquad (2.40.2)$$

las que constituyen las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del portador, dependen de las propiedades del portador (masa m, carga q) y del campo eléctrico σ / ε_o.

Ejemplo

Un electrón ingresa con velocidad $\vec{v}_o$, entre las placas conductoras donde existe un campo eléctrico uniforme E (las dimensiones de las placas están indicadas en la figura 14). Encontrar una expresión de la coordenada y correspondiente al punto donde incide el electrón sobre la pantalla.

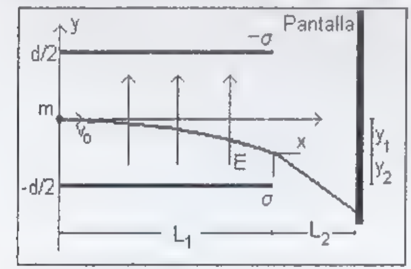


Figura 14

Empleando la expresión (2.40.1) para x, se puede determinar el tiempo t_1 necesario para recorrer la longitud L_1 y alcanzar el extremo de las placas

$$L_1 = v_o\, t_1 \qquad \text{entonces} \qquad t_1 = \frac{v_o}{L_1}$$

Para calcular la distancia y_1 que el electrón se desvió respecto de la horizontal cuando sale de las placas se emplea (2.40.2) con el tiempo t_1

$$y_1 = y(t_1) = \frac{qE}{2m} t_1^2 = \frac{qE}{2m}\left(\frac{L_1}{v_o}\right)^2$$

El electrón al abandonar las placas **continúa con velocidad constante**, siendo sus componentes, según (2.39.1 y 2)

$$v_x = v_o \qquad\qquad v_y(t_1) = \frac{q\sigma}{m\varepsilon_o}\left(\frac{L_1}{v_o}\right)$$

El electrón se ha desviado un ángulo respecto de la horizontal cuya tangente se puede expresar en términos de las componentes de la velocidad y también las distancias y_2 y L_2 mostradas en la figura 14

$$tg(\alpha) = \frac{v_y(t_1)}{v_x} = \frac{y_2}{L_2}$$

Entonces

$$y_2 = \frac{v_y(t_1)}{v_x} L_2 = \frac{q\,E\,L_1\,L_2}{m\,v_o^2}$$

La desviación total es

$$Y = y_1 + y_2 = \frac{q\,E\,L_1}{m\,v_o^2}(L_1 + L_2)$$

CUESTIONARIO

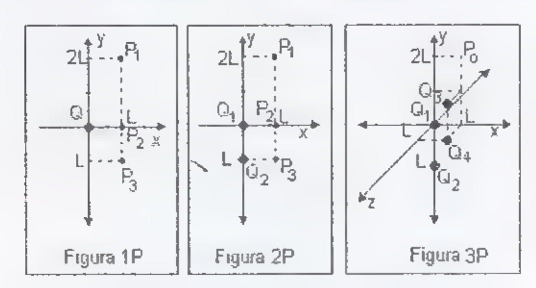
1. Conocido el campo eléctrico es posible calcular la fuerza sobre una carga, también a partir de la Ley de Coulomb eso es posible, entonces, ¿Cuál es la ventaja de definir campo eléctrico?
2. ¿Qué propiedades debe tener la carga de prueba en la definición de campo eléctrico?.
3. ¿Qué tipo de función es el campo eléctrico? ¿Por qué?
4. Las líneas de fuerzas nunca se cruzan ¿porqué?
5. ¿Es posible que exista campo eléctrico en el vacío?
6. En un campo uniforme se colocan un protón y un electrón. Compare la fuerza eléctrica que actúa sobre cada una de ellas Compare las aceleraciones.
7. ¿Cómo se puede distinguir en forma experimental un campo eléctrico de uno gravitatorio?
8. Dibuje las líneas de fuerzas que existen entre dos cargas de igual magnitud y signo contrario. Repita la gráfica considerando que la carga positiva se duplicó el valor
9. Una carga negativa se coloca en una región del espacio donde existe un campo eléctrico uniforme orientado verticalmente hacia arriba ¿Cuál es la dirección y sentido de la fuerza que experimenta la partícula?

PROBLEMAS

1. Calcule el campo eléctrico creado por una carga puntual ubicada en el origen de un sistema de referencia, en los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 (figura 1) L = 1cm Q = 10^9 C.

2.Calcule el campo eléctrico creado por dos cargas puntuales en los puntos: P_1, P_2, P_3, (ver figura 2), L = l cm, $Q_1 = 10^9$ C. $Q_2 = -10^9$ C

3.Para la distribución de cargas puntuales de la figura 3 Determine el campo eléctrico en el punto Po. Datos: $Q_1 = 10^{-9}$ C, $Q_2 = 2.10^{-9}$ C, $Q_3 = -2.10^{-9}$ C, $Q_4 = -10^{-9}$ C y a = 2 cm.



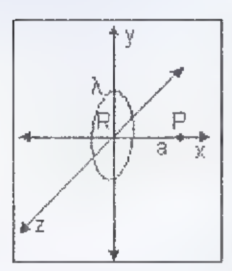


Figura 4P

4. Calcule el campo eléctrico creado por a)Una varilla muy larga con densidad de carga uniforme λ una distancia a de la misma. b)Un plano infinito con densidad de carga superficial de carga σ a una distancia a del mismo.

5. Calcule el campo eléctrico creado por un anillo de radio R con densidad lineal de carga λ,, en un punto P como muestra la figura 4. Considere dos casos en el resultado final: a) a = 0 b) R<<a.

6. Calcule el campo eléctrico creado por un disco de radio R con densidad superficial de carga σ en un punto P, como muestra la figura 5.

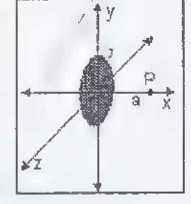


Figura 5P

7. Se lanza una partícula de carga Q_o y masa m con velocidad Vo en una región donde existe un campo eléctrico uniforme E. Analice el movimiento de la partícula si: a) Vo es paralela a E y en el mismo sentido. b) Vo es paralela a E y en sentido contrario c) Vo es perpendicular a E y d) cuando forma un ángulo α a con E.



Figura 6P

8. En el espacio comprendido entre dos láminas planas y paralelas cargadas con cargas iguales y opuestas existe un campo eléctrico uniforme. Un electrón es abandonado en reposo sobre la lámina cargada negativamente llega a la superficie de la lámina opuesta, situada a 2 cm de distancia de la primera, al cabo de 1,5. 10^8 s.
a) Calcule la intensidad del campo eléctrico. b) Obtenga la velocidad del electrón cuando llega a la segunda lámina.

9. Calcule el campo eléctrico creado por un dipolo en: a) puntos equidistantes de ambas cargas. b) puntos sobre la recta que une ambas cargas y fuera de ellas. c) puntos sobre la recta que une ambas cargas y entre ellas. Q = 10^{-9}C, a = 1 cm.

10. Un dipolo que tiene un momento dipolar p = Q.a (C. m), forma un ángulo ϕ, con la dirección de un campo eléctrico uniforme E (ver figura 6P). a) Calcule el par que actúa sobre el dipolo. b)Calcule el trabajo necesario para invertir la orientación del dipolo desde su posición de equilibrio, paralelo al campo, a la opuesta.

11. Un plano infinito tiene una distribución superficial de carga (yz), en sus proximidades se encuentra un hilo infinito con densidad lineal de carga. Determine el campo eléctrico creado por ambos en los puntos A, B, C y D, figura 7).

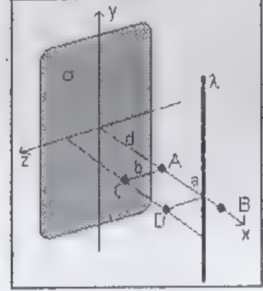


Figura 7P

12. Una carga puntual q_1 está ubicada en el origen de coordenadas y un hilo infinitamente largo con densidad lineal paralelo al eje Y corta el eje en x = d. Determinar los puntos sobre eje X en los cuales el campo eléctrico se anula (figura 8P).

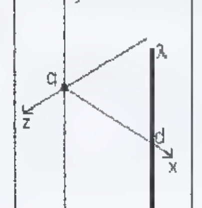


Figura 8P

CAPITULO 3

LEY DE GAUSS

3.1 INTRODUCCION

En el capítulo anterior se introdujo el concepto de campo eléctrico y se presentó la forma de calcularlo a partir de la distribución de carga que lo crea.

En este capítulo se estudiará una propiedad del campo eléctrico: ***la ley de Gauss*** que permite calcular campos eléctricos producidos por distribuciones de cargas con muy alta simetría y además permite obtener importantes propiedades de los conductores cargados. La ley de Gauss es una consecuencia directa de la ley de Coulomb.

3.2 LA LEY DE GAUSS

El enunciado de la ley de Gauss es:

El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual al cociente entre la carga neta encerrada por dicha superficie y ε_o

Matemáticamente, lo anterior puede expresarse

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.1)$$

S, representa la superficie cerrada.

Otra manera de enunciar la ley es empleando las líneas de fuerza del campo eléctrico, sería: cuando una superficie cerrada que contiene una carga eléctrica neta es atravesada por líneas de campo, el número total de líneas que la atraviesa es proporcional a la carga que está en el interior de la superficie.

El número total de líneas es independiente de la forma de la superficie.

La ley de Gauss es una ley general que se aplica a cualquier superficie cerrada y es una herramienta importante porque permite el cálculo de la cantidad de cargas mediante el flujo del campo a través de una superficie cerrada fuera de la distribución de cargas. Cuando las distribuciones de cargas tienen suficiente simetría, el uso de la ley de Gauss simplifica el cálculo del campo eléctrico

3.3 CONCEPTOS COMPLEMENTARIOS

Antes de demostrar la igualdad de la ley de Gauss (3.1), es conveniente, recordar algunos conceptos empleados en el enunciado de la misma.

3.3.1 La superficie como vector

Dada una superficie, es posible representarla con un vector $\vec{S}$ que cumpla las siguientes condiciones

El módulo de $|\vec{S}|$ es igual al área de la superficie

La dirección es perpendicular a la superficie que representa.

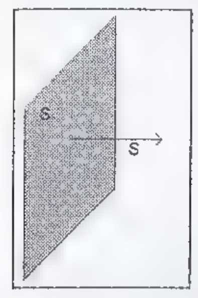


Figura 1

El sentido se determina recorriendo su contorno, empleando el sentido de giro de las agujas del reloj, si tiene sentido antihorario es positivo y si fuera horario negativo.

La figura 1 muestra un ejemplo. En caso de que la superficie sea un diferencial elemental se tiene $\vec{dS}$ (ver figura 2).

Es conveniente recordar la diferencia entre una superficie abierta y una superficie cerrada, esta última contiene un volumen (ejemplo: cilindro), mientras que una superficie abierta, es la que está limitada por una curva cerrada (ejemplo: circulo).

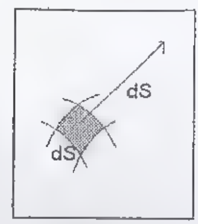


Figura 2

3.3.2 Ángulo plano y ángulo sólido

En la definición de **ángulo plano**, se relaciona la longitud del arco de circunferencia y el radio de la misma, según indica en la figura 3, se tiene

$$\alpha = \frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} = \frac{l_3}{r_3} = \ldots = \frac{l_n}{r_n} \qquad (3.2)$$

El ángulo está expresado en radianes, la relación para distintos arcos y radios de la figura 3 se mantiene constante.

El ángulo plano total subtendido desde el punto O (figura 4) es

$$\alpha = \frac{l_{Circ}}{r} = \frac{2\pi\, r}{r} = 2\pi \qquad (3.3)$$

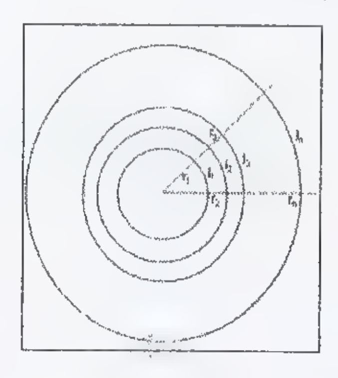


Figura 3

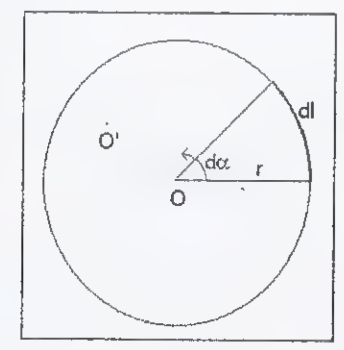


Figura 4

El cálculo se hizo considerando el centro de la circunferencia, el resultado será el mismo independientemente de la elección del punto O de la figura 4, mientras el punto pertenezca en el interior de la circunferencia.

En forma diferencial la (3.2) será

$$d\alpha = \frac{dl}{r} \quad \Rightarrow \quad dl = r\, d\alpha \qquad (3.4)$$

Es posible extender la definición anterior al área subtendida desde el punto O y a una distancia r, mediante la relación

$$\Omega = \frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2} = \frac{S_3}{r_3^2} = \ldots = \frac{S_n}{r_n^2} \qquad (3.5)$$

Esta relación recibe el nombre de **ángulo sólido**. Si la superficie es la de una esfera de radio r el ángulo sólido subtendido desde el centro será

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = \frac{4\pi\, r^2}{r^2} = 4\pi \qquad (3.6)$$

El ángulo sólido está expresado en stereoradianes.

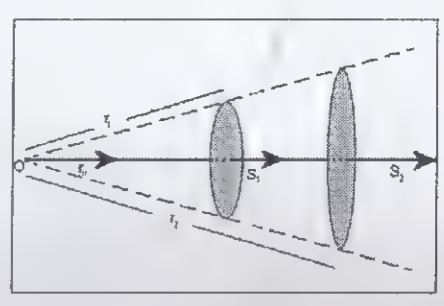
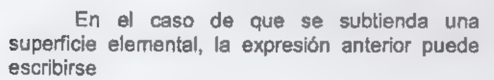


Figura 5



En el caso de que se subtienda una superficie elemental, la expresión anterior puede escribirse

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \qquad (3.7)$$

si se tiene en cuenta la naturaleza vectorial de la superficie y se le asigna un versor al radio vector, la expresión anterior puede escribirse, ver figura 6

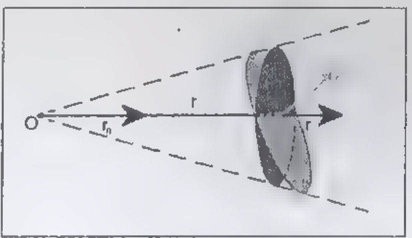


Figura 6

$$d\Omega = \frac{\vec{r_o}\, \vec{dS}}{r^2} \qquad (3.8)$$

En general, puede pensarse que $\vec{r_o}$ y $\vec{dS}$ no son colineales y la relación sigue siendo válida, y por lo tanto, esta es la expresión de ángulo sólido más general.

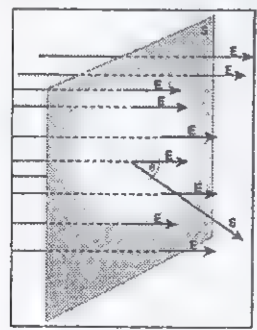


Figura 7

3.3.2 Concepto de Flujo

El flujo de un campo de vectores $\vec{E}$ a través de una superficie $\vec{S}$ puede expresarse como

$$\Phi = \vec{E}.\vec{S} \qquad (3.9)$$

desarrollada la expresión da

$$\Phi = \left|\vec{E}\right|.\left|\vec{S}\right| \cos(\theta) \qquad (3.10)$$

donde θ representa el ángulo que forman los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ respectivamente (ver figura 7).

Considerando los casos:

1. θ = 0, el valor del flujo es máximo con signo positivo $\Phi = |\vec{E}|.|\vec{S}|$, en este caso los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ son paralelos. Ver figura 8.

2. θ = 90º, el valor del flujo es $\Phi = 0$, en este caso los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ son perpendiculares. Ver figura 8.

Figura 8

Si la superficie fuera diferencial $\vec{dS}$, entonces el flujo vendrá dado por

$$d\Phi = \vec{E}.\vec{dS} \qquad (3.11)$$

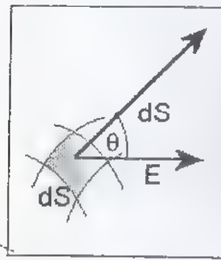


Figura 9

como se muestra en la figura 9. En términos de líneas de fuerzas, el diferencial de flujo representa el número de líneas de campo que atraviesan un elemento de superficie normal al campo

El flujo extendido a toda la superficie será la integral

$$\Phi = \iint_S \vec{E}.\vec{dS} \qquad (3.12)$$

3.4 DEMOSTRACIÓN DE LA IGUALDAD EN LA LEY DE GAUSS

Si se considera una carga puntual q encerrada por una superficie imaginaria, de forma arbitraria, llamada superficie gasussiana como muestra la figura 10, entonces el flujo a través de la superficie cerrada estará dado por

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\,\vec{dS} \qquad (3.13)$$

reemplazando $\vec{E}$ por el campo de la carga puntual sobre la superficie, dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{r_o}}{r^2} \qquad (3.14)$$

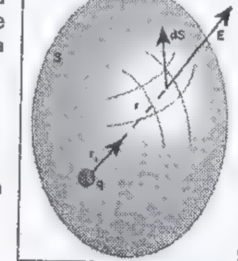


Figura 10

entonces

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \oiint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{r_o}}{r^2}.\vec{dS} \qquad (3.15)$$

ordenando resulta

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \oiint_S \frac{\vec{r_o}}{r^2} . \vec{dS} \qquad (3.16)$$

teniendo en cuenta la definición de ángulo sólido (3.8) se puede escribir

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \oiint_S d\Omega \qquad (3.17)$$

Esta igualdad se puede presentar así SOLO por el hecho de que el campo depende exactamente de la inversa del cuadrado de la distancia.

Como el ángulo sólido está subtendido desde el punto donde está la carga y es sobre toda la superficie cerrada resulta

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_o} \qquad (3.18)$$

con lo que se prueba la igualdad de la ley de Gauss.

3.5 MAS CONSIDERACIONES

- La ley de Gauss es una consecuencia directa del hecho de que la intensidad del campo eléctrico de un diferencial de carga dq depende de la inversa del cuadrado de la distancia.

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \frac{dq}{r^2} \vec{r_o} \qquad (3.19)$$

- El flujo neto del campo eléctrico a través de una superficie cerrada depende exclusivamente de la carga neta encerrada por ella y no importa como está distribuida la carga.

- El flujo neto del campo eléctrico a través de una superficie cerrada no depende de la forma de la superficie cerrada.

- Las cargas externas a la superficie cerrada no influyen en el flujo a través de ella

3.6 APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS

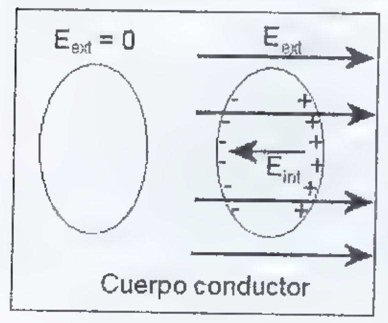


Figura 11

3.6.1 Conductor aislado. Distribución de carga y campo.

Se considera un cuerpo conductor sin carga en exceso, aislado de forma arbitraria (ver figura 11), y se lo coloca en una región donde existe un campo eléctrico $\vec{E}_{ext}$. Como en un conductor existen portadores de cargas libres, el campo eléctrico externo actuará sobre los portadores de cargas del conductor obligándolos a moverse, produciéndose una redistribución de cargas, que crea en el interior del

conductor un campo $\vec{E}_{int}$, de sentido contrario al campo eléctrico exterior, haciendo que se reduzca la magnitud del campo dentro del conductor. Al final del proceso, que ocurre en un tiempo muy corto y que no necesita ser tenido en cuenta por ahora, la distribución de cargas es de tal forma que el campo eléctrico total $\left(\vec{E}_{ext} - \vec{E}_{int}\right)$ se anula dentro del conductor. Entonces se puede decir que en condiciones de equilibrio eléctrico: **el campo eléctrico en el interior de un conductor es nulo.**

Si se emplea la ley de Gauss, en estas condiciones, eligiendo una superficie gaussiana dentro del conductor y muy cercana a la superficie, como el campo eléctrico $\vec{E}$ vale cero en todos los puntos interiores del conductor, también debe ser nulo en esa superficie y por lo tanto, el flujo del campo a través de esa superficie debe ser cero, esto es

$$\oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = 0 \qquad (3.20)$$

La ley de Gauss predice que el exceso de carga en un conductor no está dentro de la superficie gaussiana, y entonces debe estar fuera de ella, esto significa, que debe estar en la superficie misma del conductor. De otra forma en la figura 12.1 se muestra que se deposita un exceso de carga negativa en el conductor, las cargas son móviles en el conductor y ejercen entre sí fuerzas de repulsión (figura 12.2), como consecuencia de esto, se ubicarán en lugares donde la interacción sea mínima para alcanzar el equilibrio eléctrico, esto es en la superficie (figura 12.3).

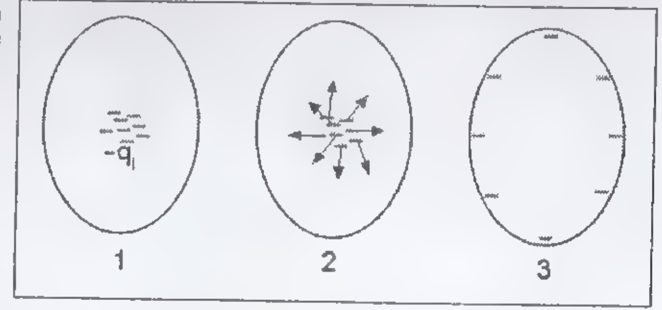


Figura 12

Entonces se puede decir que en condiciones de equilibrio eléctrico:
La carga en un conductor aislado y cargado está en la superficie.
Queda claro entonces, que es posible definir una densidad superficial de carga en un conductor cargado

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \qquad (3.21)$$

Se puede calcular el campo eléctrico, empleando la ley de Gauss en puntos que están a una distancia muy corta de la superficie.

El campo $\vec{E}$ sobre la superficie del conductor cargado y aislado, en condiciones de equilibrio eléctrico es normal a la superficie y su sentido es saliente de ella si la carga es positiva. Si no fuera normal, existirá una componente del campo tangencial que produciría un movimiento de las cargas y el conductor no estará en equilibrio

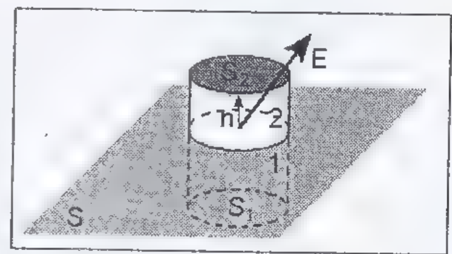


Figura 13

eléctrico.

Para usar la ley de Gauss vamos a considerar una superficie gaussiana del tipo "caja de pastillas" de sección transversal S, como muestra la figura 13. Como el campo es nulo en todos los puntos interiores del conductor, la única contribución al flujo del campo es a través de la tapa exterior S, entonces de la ley de Gauss se tiene

$$\oiint_{SC} \vec{E}\, \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.22)$$

$$\iint_S \vec{E}\, \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.23)$$

$$E\, S = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{S\varepsilon_o} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \qquad (3.24)$$

Obsérvese que este resultado difiere del resultado obtenido para el caso del campo producida por una superficie con densidad de carga, es conveniente hacer un análisis cuidadoso.

De todo lo anterior, es posible concluir que la presencia de un conductor en una región donde existe campo eléctrico producirá una discontinuidad en el. Como el campo en el interior del conductor es cero y muy cerca de su superficie es $\frac{\sigma}{\varepsilon_o}$ se puede observar esta discontinuidad.

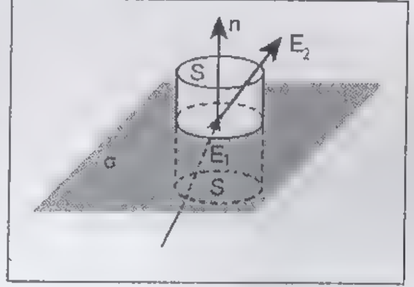


Figura 14

3.6.2 Discontinuidad del campo eléctrico a través de una lámina de carga superficial

En una lámina con densidad superficial de carga σ, se puede emplear la ley de Gauss para estudiar el comportamiento del campo a través de ella, para ello, se emplea una caja de pastilla, como se muestra en la figura 14 de modo que

$$\oiint_{SC} \vec{E}\, \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_o} \iint_S \sigma\, dS \qquad (3.25)$$

solo se tiene en cuenta el flujo a través de las superficies superior e inferior de la caja, puesto que la superficie lateral se puede hacer tender a cero y por lo tanto, el flujo en esta será cero.

$$\iint_{S_1} \vec{E}\, \vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{E}\, \vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_o} \iint_S \sigma\, dS \qquad (3.26)$$

$$(E_{2n} - E_{1n})S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_o} \qquad (3.27)$$

entonces

$$(E_{2n} - E_{1n}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \qquad (3.28)$$

la discontinuidad en la componente normal del campo eléctrico a través de la lámina es proporcional a la densidad superficial de carga.

3.6.3 Aplicación de la ley de Gauss para determinar los campos eléctricos de distribuciones con simetría.

Se usará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ conociendo cómo es la distribución de cargas.

Considerando que el campo está dentro la de la integral en la expresión

$$\oint\!\!\oint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.29)$$

para extraer el campo de la integral debe seleccionarse una superficie gaussiana que cumpla con:

- Debe pasar por el punto donde se quiere calcular el campo
- Debe contener a la carga de interés.
- Debe respetar la simetría de la distribución de carga.

Esto último implica que se pueden elegir superficies gaussianas donde $\vec{E}(r)$ y $\vec{dS}$ sean paralelos y el campo en todos los puntos de esa superficie sea constante y por lo tanto independiente de $\vec{dS}$, entonces es posible extraer de la integral (3.29) el módulo del campo.

También es posible elegir las superficies con $\vec{dS}$ perpendicular a $\vec{E}(r)$, en este caso simplemente se anula el flujo.

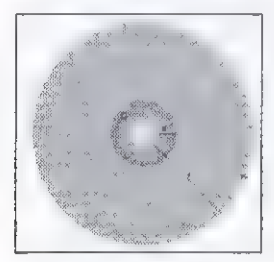


Figura 15

3.6.3.1: Esfera conductora con carga Q y de radio a

Se usará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en puntos que cumplan $r \geq a$, para eso se **elige** una superficie gaussiana esférica de radio r concéntrica a la esfera cargada de radio a. (Ver figura 15)

Aplicando entonces la expresión

$$\oint\!\!\oint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.30)$$

Para este caso particular, se puede interpretar que toda la carga está concentrada en el centro de la esfera cargada (por la simetria) y que por lo tanto, la dirección del campo eléctrico es radial y resulta paralela al $\vec{dS}$ de la superficie gaussiana, entonces:

$$\oint\!\!\oint_{SC} E\cos(0)\,dS = \oint\!\!\oint_{SC} E\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.31)$$

Como la intensidad del campo eléctrico en el vacio, en general, depende de la carga que lo genera y la distancia entre esa carga y el punto, en este ejemplo la carga es constante y la distancia a cualquier punto de la superficie gaussiana también lo es, esto significa que el módulo del campo en cualquier punto de la superficie gaussiana es constante, independiente de dS. De lo anterior surge que es posible extraer de la integral de superficie a E

$$E \oint\!\!\oint_{SC} dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.32)$$

integrando, sobre la superficie gaussiana esférica de radio r resulta

$$E\,4\pi\,r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.33)$$

entonces el módulo del campo eléctrico para una esfera con carga Q y radio a en puntos r ≥ a resulta

$$E = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o r^2} \qquad (3.34)$$

y su dirección es radial.

3.6.3.2: Distribución de cargas con simetría esférica de radio R y densidad volumétrica constante ρ. Carga total Q

Se usará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en todos los puntos, esto es, para r ≤ R y r ≥ R, para eso se **elige** una superficie gaussiana esférica concéntrica a la carga, considerando que su distribución es uniforme.

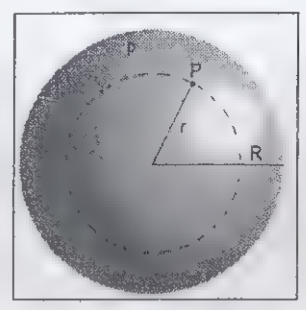


Figura 16

a) Análisis para r ≤ R

Una superficie gaussiana esférica de radio r (ver figura 16) tal que cumpla con r ≤ R contendrá la carga Q'

$$Q' = \int_{V'} \rho dV = \frac{4}{3}\pi\,r^3\rho \qquad (3.35)$$

empleando Gauss, recordando que solo interesa la carga dentro de la superficie gaussiana, se tiene

$$\oiint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{Q'}{\varepsilon_o} \qquad (3.36)$$

y como la superficie gaussiana es esférica y concéntrica a la distribución entonces $\vec{E}$ y $\vec{dS}$ son paralelos, la (3.36) se puede escribir

$$\oiint_{SC} E\,dS = \frac{4}{3\varepsilon_o}\pi\,r^3\rho \qquad (3.37)$$

usando los mismos argumentos del caso anterior, se extrae el campo de la integral y se integra sobre toda la superficie

$$E\,4\pi\,r^2 = \frac{4}{3\varepsilon_o}\pi\,r^3\rho \qquad (3.38)$$

haciendo la reducciones posibles y despejando el campo resulta

$$E = \frac{\rho\,r}{3\varepsilon_o} \qquad (3.39)$$

Esta expresión de campo es válida para r ≤ R.

b) Análisis para r ≥ R

Una superficie gaussiana esférica de radio r (ver figura 17) tal que cumpla con r ≥ R, contendrá a TODA la carga Q, entonces

$$Q = \int_V \rho dV = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \qquad (3.40)$$

empleando Gauss

$$\oint\!\!\oint_{SC} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.41)$$

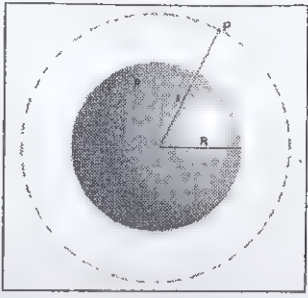


Figura 17

y como la superficie gaussiana es esférica y concéntrica a la distribución entonces $\vec{E}$ y $d\vec{S}$ son paralelos, la (3.41) se puede escribir

$$\oint\!\!\oint_{SC} E\, dS = \frac{4}{3\varepsilon_o}\pi R^3 \rho \qquad (3.42)$$

usando los mismos argumentos del caso anterior, se extrae el campo de la integral e integrando sobre toda la superficie

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{4}{3\varepsilon_o}\pi R^3 \rho \qquad (3.43)$$

despejando el campo

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2} \qquad (3.44)$$

Esta expresión de campo es válida para r ≥ R
Entonces, haciendo un resumen el campo eléctrico resulta

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_o} & r \le R \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2} & r \ge R \end{cases} \qquad (3.45)$$

Obsérvese que si r → R entonces $E(R) = \dfrac{\rho R}{3\varepsilon_o}$

3.6.3.3: Distribución de cargas con simetría esférica de radio R y densidad volumétrica ρ(r) = A.r, con 0 ≤ r ≤ R y A es una constante.

Se usará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en todos los puntos esto es para r ≤ R y r ≥ R, para eso se elige una superficie gaussiana esférica concéntrica a la carga, considerando la simetría radial de la misma $\rho(r) = A.r$.

a) Análisis para r ≤ R

Una superficie gaussiana esférica de radio r tal que cumpla con r ≤ R contendrá la carga Q'

$$Q' = \int_{V'} \rho dV = \int_0^r (A r') 4\pi r'^2 dr' = 4\pi A \int_0^r r'^3 dr' = 4\pi A \frac{r^4}{4} = \pi A r^4 \qquad (3.46)$$

empleando Gauss, recordando que solo interesa la carga dentro de la superficie gaussiana, se tiene

$$\oiint_{SC} \vec{E}\, \vec{dS} = \frac{Q'}{\varepsilon_o} \qquad (3.47)$$

y como la superficie gaussiana es esférica y concéntrica a la distribución entonces $\vec{E}$ y $\vec{dS}$ son paralelos, la (3.47) se puede escribir

$$\oiint_{SC} E\, dS = \frac{\pi A r^4}{\varepsilon_o} \qquad (3.48)$$

usando los mismos argumentos del caso anterior, se extrae el campo de la integral e integrando sobre toda la superficie

$$E 4\pi r^2 = \frac{\pi A r^4}{\varepsilon_o} \qquad (3.49)$$

haciendo la reducciones posibles y despejando el campo resulta

$$E(r) = \frac{A r^2}{4\, \varepsilon_o} \qquad (3.50)$$

Esta expresión de campo es válida para $r \leq R$.

b) Análisis para $r \geq R$

Una superficie gaussiana esférica de radio r tal que cumpla con $r \geq R$, contendrá a TODA la carga Q, entonces

$$Q = \int_V \rho dV = \int_0^R (A r') 4\pi r'^2 dr' = \pi A R^4 \qquad (3.51)$$

empleando Gauss

$$\oiint_{SC} \vec{E}\, \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.52)$$

y como la superficie gaussiana es esférica y concéntrica a la distribución entonces $\vec{E}$ y $\vec{dS}$ son paralelos, la (3.52) se puede escribir

$$\oiint_{SC} E\, dS = \frac{\pi A R^4}{\varepsilon_o} \qquad (3.53)$$

usando los mismos argumentos del caso anterior, extraemos el campo de la integral e integramos sobre toda la superficie

$$E 4\pi r^2 = \frac{\pi A R^4}{\varepsilon_o} \qquad (3.54)$$

despejando el campo

$$E(r) = \frac{A R^4}{4\varepsilon_o r^2} \qquad (3.55)$$

Esta expresión de campo es válida para $r \geq R$

Entonces, haciendo un resumen el campo eléctrico resulta

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{A r^2}{4\,\varepsilon_o} & r \leq R \\ \dfrac{A R^4}{4\varepsilon_o r^2} & r \geq R \end{cases} \qquad (3.56)$$

Obsérvese que si $r \to R$ $E(R) = \dfrac{A R^2}{4\,\varepsilon_o}$

3.6.3.4: Hilo muy largo con densidad de carga uniforme λ

Se usará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en puntos que cumplan $r \geq a$, en este caso se **elige** una superficie gaussiana cilíndrica de radio r concéntrica al hilo cargado. (Ver figura 18)

Aplicando entonces la expresión

$$\oiint_{sc} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.57)$$

Para este caso particular, debido a que se considera un hilo muy largo, se puede asumir que la dirección del campo es radial y resulta paralela al $d\vec{S}$ de la superficie gaussiana lateral (SL) del cilindro gaussiano, mientras que para las tapas (ST1 y ST2) del mismo, la dirección del campo es perpendicular, (ver figura 19) entonces

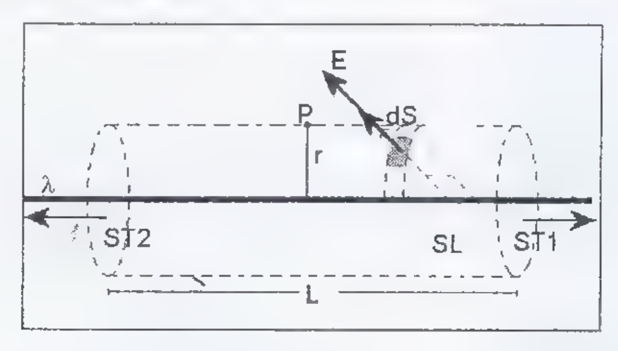


Figura 18

$$\oint\!\!\oint_{SC} \vec{E}\, d\vec{S} = \iint_{SL} E\cos(0)\,dS + \iint_{ST1} E\cos(90°)\,dS + \iint_{ST2} E\cos(90°)\,dS \quad (3.58)$$

de donde surge que

$$\iint_{SL} E\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.59)$$

Como la intensidad del campo eléctrico en el vacío, en general, depende de la carga que lo genera y la distancia entre esa carga y el punto, en este ejemplo, la carga es constante y la distancia a cualquier punto de la superficie gaussiana también lo es, esto significa que el módulo del campo en cualquier punto de la superficie gaussiana es constante, independiente de $\vec{dS}$. De lo anterior surge que es posible extraer de la integral de superficie a E

$$E \iint_{SL} dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.60)$$

integrando, sobre la superficie SL gaussiana resulta

$$E\, 2\pi\, rL = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.61)$$

donde L representa una longitud arbitraria del hilo cargado, despejando el campo

$$E = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon_o\, r} \qquad (3.62)$$

Si $\frac{Q}{L} = \lambda$ entonces el módulo del campo eléctrico para un hilo con densidad lineal de carga λ resulta

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\, \varepsilon_o\, r} \qquad (3.63)$$

y su dirección es radial

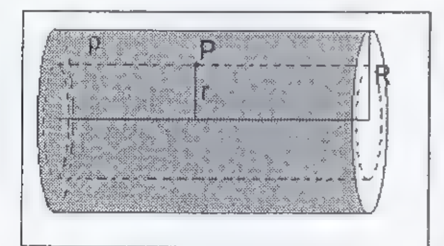


Figura 19

3.6.3.5: Distribución de cargas con simetría cilíndrica de radio R y densidad volumétrica constante ρ. Carga total Q

Se usará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en puntos que cumplan $r \le R$ y $r \ge R$, En este caso, se elige una superficie gaussiana cilíndrica de radio r concéntrica al cilindro cargado. (Ver figura 19)

a) Análisis para r ≤ R

Una superficie gaussiana cilíndrica de radio r (ver figura 19) tal que cumpla con $r \le R$ contendrá la carga

$$Q' = \int_{V'} \rho\, dV = \int_0^r \rho\, 2\pi\, r' L\, dr' = \rho\pi\, r^2 L \qquad (3.64)$$

empleando Gauss

$$\oint\!\!\oint_{SC} \vec{E}\, \vec{dS} = \frac{Q'}{\varepsilon_o} \qquad (3.65)$$

Para este caso particular, debido a que se considera un cilindro muy largo, se puede asumir que la dirección del campo es radial y resulta paralela al $\vec{dS}$ de la superficie gaussiana lateral (SL) del cilindro gaussiano, mientras que para las tapas (ST1 y ST2) del mismo es perpendicular, (ver figura 20) entonces

$$\oint\!\!\oint_{SC} \vec{E}\, \vec{dS} = \iint_{SL} E\cos(0)\, dS + \iint_{ST1} E\cos(90^o)\, dS + \iint_{ST2} E\cos(90^o)\, dS \qquad (3.66)$$

de donde surge que

$$\iint_{SL} E\, dS = \frac{Q'}{\varepsilon_o} = \frac{\rho\pi\, r^2 L}{\varepsilon_o} \qquad (3.67)$$

usando los mismos argumentos del caso 4, se extrae el campo de la integral y se integra sobre la superficie lateral del cilindro gaussiano

$$E\, 2\pi\, r\, L = \frac{\rho\pi\, r^2 L}{\varepsilon_o} \qquad (3.68)$$

Despejando el campo

$$E(r) = \frac{\rho\, r}{2\varepsilon_o} \qquad (3.69)$$

esta expresión de campo es válida para $r \leq R$

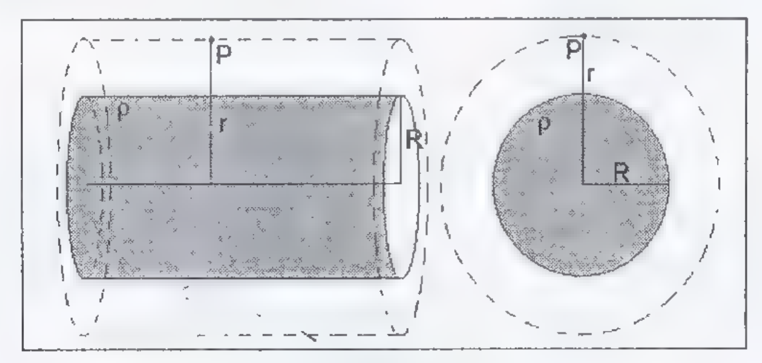


Figura 20

b) Análisis para $r \geq R$

De nuevo se elige una superficie gaussiana cilíndrica de radio r (ver figura 20) tal que cumpla con r ≥ R y contendrá toda la carga, esto es

$$Q=\int_V \rho\, dV=\int_0^R \rho\, 2\pi\, r' L\, dr'=\rho\pi\, R^2 L \qquad (3.70)$$

empleando Gauss

$$\oiint_{SC} \vec{E}\, d\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.71)$$

Empleando los mismos argumentos que antes la integral del primer miembro se reduce a

$$\iint_{SL} E\, dS=\frac{Q}{\varepsilon_o}=\frac{\rho\pi\, R^2 L}{\varepsilon_o} \qquad (3.72)$$

usando los mismos argumentos del caso 4, se extrae el campo de la integral y se integra sobre la superficie lateral del cilindro gaussiano

$$E\, 2\pi\, r\, L=\frac{\rho\pi\, R^2 L}{\varepsilon_o} \qquad (3.73)$$

Despejando el campo

$$E(r)=\frac{\rho\, R^2}{2\varepsilon_o r} \qquad (3.74)$$

esta expresión de campo es válida para r ≥ R

Entonces, haciendo un resumen el campo eléctrico resulta

$$E(r)=\begin{cases}\dfrac{\rho\, r}{2\varepsilon_o} & r\leq R\\[2mm] \dfrac{\rho\, R^2}{2\varepsilon_o r} & r\geq R\end{cases} \qquad (3.75)$$

Obsérvese que si r → R $\quad E(R)=\dfrac{\rho R}{2\varepsilon_o}$

3.6.3.6: Lámina cargada, plana e infinita.

La carga neta q está distribuida en ambas superficies de la lámina, la densidad superficial es uniforme, esto es q = σ S.

El campo eléctrico es normal al plano de la lámina y saliente, la superficie gaussiana que se debe elegir tiene que respetar la simetría y en estaa superficie el campo debe ser constante y su dirección paralela al elemento diferencial de superficie, entonces la superficie elegida es un cilindro de sección S, colocado de modo que sus tapas queden a ambos lados de la lámina a la misma distancia, como muestra la figura 21.

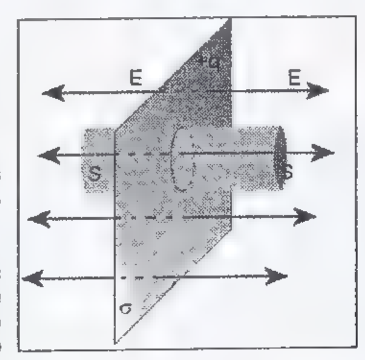


Figura 21

Aplicando entonces la expresión

$$\oint\!\!\!\oint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3.76$$

donde Q es la carga contenida por el cilindro esto es $Q = \sigma S$.

La integral se puede escribir

$$\oint\!\!\!\oint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = \iint_{SL} E\cos(90^\circ)\,dS + \iint_{ST1} E\cos(0^\circ)\,dS + \iint_{ST2} E\cos(0^\circ)\,dS \qquad (3.77)$$

de donde

$$\oint\!\!\!\oint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = 2\iint_{ST1} E\cos(0^\circ)\,dS = 2ES \qquad (3.78)$$

entonces

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_o} \qquad (3.79)$$

despeando el campo

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \qquad (3.80)$$

El campo a ambos lados de la lámina es el mismo y es constante, esto es, no depende de la posición respecto de la lámina.

3.6.3.7 Distribución de cargas con simetría rectángular de espesor L y densidad volumétrica constante ρ. Carga total Q

En este caso por el tipo simetría que presenta la distribución de cargas el campo eléctrico es normal al plano de la lámina y saliente, entonces la superficie gaussiana elegida es un cilindro de sección S, colocado de modo que sus tapas queden a ambos lados del plano que divide a la placa en dos mitades y a la misma distancia del mismo, como muestra la figura 22

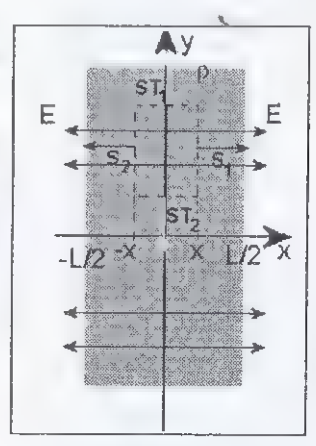


Figura 22

a) Análisis para $|x| \le L/2$

Una superficie gaussiana cilíndrica de longitud x (ver figura 23) tal que cumpla con $|x| \lesseqgtr L/2$ contendrá la carga

$$Q' = \int_{V'} \rho\, dV = \int_{-x}^{x} \rho\, S\, dx' = 2\rho S x \qquad (3.81)$$

Aplicando entonces la expresión

$$\oint\!\!\oint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{Q'}{\varepsilon_o} \quad (3.82)$$

La integral se puede escribir

$$\oint\!\!\oint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = \iint_{SL} E\cos(90^o)\,dS + \iint_{S_1} E\cos(0^o)\,dS + \iint_{S_2} E\cos(0^o)\,dS \quad (3.83)$$

de donde

$$\oint\!\!\oint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = 2\iint_{S} E\cos(0^o)\,dS = 2\,E\,S \quad (3.84)$$

entonces

$$2\,E\,S = \frac{2\,\rho\,S\,x}{\varepsilon_o} \quad (3.85)$$

despejando el campo

$$E(x) = \frac{\rho\,x}{\varepsilon_o} \quad (3.86)$$

esta expresión de campo es válida para $|x| \leq L/2$

b) Análisis para $|x| \geq L/2$

Una superficie gaussiana cilíndrica de longitud x (ver figura 23) tal que cumpla con $|x| \geq L/2$ contendrá la carga

$$Q = \int_{V'} \rho\,dV = \int_{-L/2}^{L/2} \rho\,S\,dx' = \rho\,S\,L \quad (3.87)$$

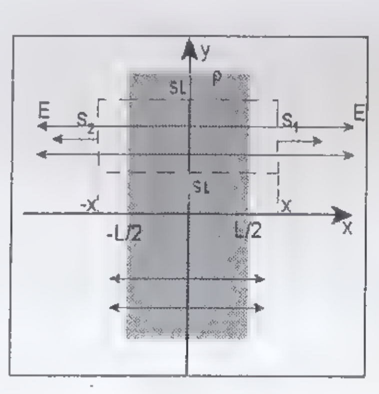


Figura 23

Aplicando entonces la expresión

$$\oint\!\!\oint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad (3.88)$$

La integral se puede escribir

$$\oint\!\!\oint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = \iint_{SL} E\cos(90^o)\,dS + \iint_{S_1} E\cos(0^o)\,dS + \iint_{S_2} E\cos(0^o)\,dS \quad (3.89)$$

de donde

$$\oint\!\!\oint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = 2\iint_{S} E\cos(0^o)\,dS = 2\,E\,S \quad (3.90)$$

entonces

$$2ES = \frac{\rho S L}{\varepsilon_o} \quad (3.91)$$

despejando el campo

$$E(x) = \frac{\rho L}{2\varepsilon_o} \quad (3.92)$$

esta expresión de campo es válida para $|x| \geq L/2$

Entonces, haciendo un resumen el campo eléctrico resulta

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho x}{\varepsilon_o} & |x| \leq L/2 \\ \dfrac{\rho L}{2\varepsilon_o} & |x| \geq L/2 \end{cases} \quad (3.93)$$

Obsérvese que si $x \to L/2$ $\quad E(L/2) = \dfrac{\rho L}{2\varepsilon_o}$

3.7 LEY DE GAUSS EN FORMA DIFERENCIAL

Si se considera un elemento de volumen que contiene un diferencial de carga dq, como el mostrado en la figura 24, y se calcula el flujo del campo eléctrico a través de él, por las características geométricas del elemento de volumen empleado, es posible hacer el análisis de flujo del campo según las componentes de este.

Si se toman las caras paralelas al plano xz y se llama $\Delta\Phi_{y1}$ al flujo a través de la cara más cercana del plano mencionado, tenemos

$$\Delta\Phi_{y1} = \vec{E}(x,y,z)\left(-\Delta x \Delta z \, \vec{j}\right) = -E_y(x,y,z)\Delta x \Delta z \quad (3.94)$$

para la otra cara $\Delta\Phi_{y2}$

$$\Delta\Phi_{y2} = \vec{E}(x,y+\Delta y,z)\left(\Delta x \Delta z \, \vec{j}\right) = E_y(x,y+\Delta y,z)\Delta x \Delta z \quad (3.95)$$

Entonces el cambio en el flujo para esa dirección es

$$\Delta\Phi_y = \left(E_y(x,y+\Delta y,z) - E_y(x,y,z)\right)\Delta x \Delta z \quad (3.96)$$

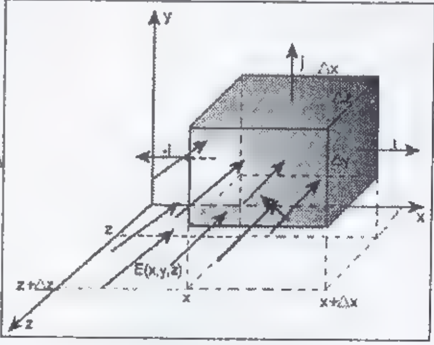


Figura 24

multiplicando y dividiendo por Δy resulta

$$\Delta\Phi_y = \frac{\left(E_y(x,y+\Delta y,z) - E_y(x,y,z)\right)}{\Delta y}\Delta x \Delta z \Delta y \quad (3.97)$$

el mismo procedimiento se puede hacer para calcular el cambio en el flujo para las otras orientaciones obteniéndose

$$\Delta\Phi_x = \frac{\left(E_x(x+\Delta x,y,z) - E_x(x,y,z)\right)}{\Delta x}\Delta x\Delta z\Delta y \qquad (3.98.1)$$

$$\Delta\Phi_z = \frac{\left(E_z(x,y,z+\Delta z) - E_z(x,y,z)\right)}{\Delta z}\Delta x\Delta z\Delta y \qquad (3.98.2)$$

Por lo tanto, el flujo total será la suma y de acuerdo a la ley de Gauss resulta

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_x + \Delta\Phi_y + \Delta\Phi_z = \rho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \qquad (3.99)$$

entonces

$$\left[\frac{\left(E_x(x+\Delta x,y,z)-E_x(x,y,z)\right)}{\Delta x} + \frac{\left(E_y(x,y+\Delta y,z)-E_y(x,y,z)\right)}{\Delta y} + \frac{\left(E_z(x,y,z+\Delta z)-E_z(x,y,z)\right)}{\Delta z}\right]\Delta x\,\Delta z\Delta y = \frac{\rho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{\varepsilon_o}$$

tomando el límite $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ y $\Delta z \to 0$ la expresión anterior resulta

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad (3.100)$$

Que representa la divergencia del campo eléctrico, si usamos el operador "nabla", se tiene

$$\nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad (3.101)$$

Por lo tanto, esta es una relación local, la divergencia del campo eléctrico en un punto del espacio es el cociente entre la densidad de carga volumétrica en ese punto y ε_o

---

CUESTIONARIO

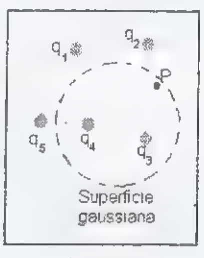
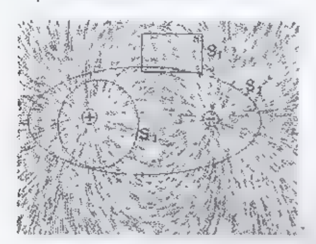
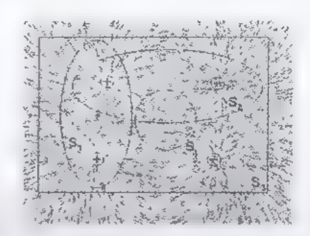


Figura 1P

1. Considere la superficie gaussiana que rodea parte de la distribución de carga mostrada en la figura 1
   a. ¿Cuál de las cargas contribuye al campo eléctrico en el punto P?
   b. Calcule el flujo del campo eléctrico a través de la superficie punteada de la figura 1P.
2. Calcule el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada, si la carga contenida dentro de ella es:
   a. $Q = 0$.
   b. Una carga puntual Q_o
   c. Un conjunto de cargas puntuales Q_i con $i = 1,2,\ldots n$
   d. Un cuerpo conductor cargado con una densidad de carga σ
   e. Una región donde existe una densidad volumétrica de carga ρ
   f. A partir de los casos anteriores establezca una conclusión que contenga a todos los casos anteriores
3. Empleando la ley de Gauss demuestre que las líneas del campo eléctrico tienen fuente y sumidero Ayuda: emplee un dipolo y elija superficies cada vez más grande, partiendo de una que solo contenga a una de las cargas.

4. ¿Cómo se puede demostrar que el flujo del campo eléctrico no depende de la forma y del tamaño de la superficie cerrada que contiene la carga?
5. Es posible usar la ley de Gauss para calcular el campo de un dipolo eléctrico? Porque?
6. Para los espectros de campo eléctricos de las figuras, determine el flujo de acuerdo con las superficies indicadas





7. ¿Qué conclusiones saca de los esquemas de la figura 2P de flujos eléctricos netos a través de una superficie cerrada?

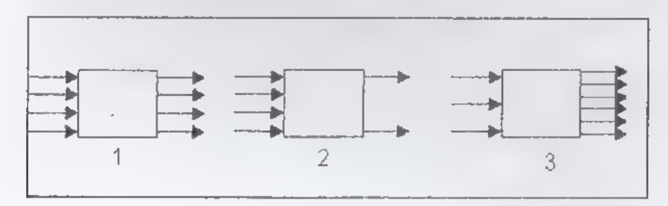


Figura 2P

8. Si la carga está en la superficie gaussiana ¿qué conclusiones se pueden obtener con el empleo de la ley de Gauss?
9. Si se encierra el dipolo en una superficie gaussiana, la carga neta encerrada es cero y según la ley de Gauss el campo eléctrico sería también cero. ¿Es correcto este razonamiento? si no lo es, ¿dónde está es error?
10. Sea un conductor hueco, aislado, grande y sin carga. A través de una pequeña abertura en la parte superior del conductor se introduce una pequeña esferita de metal que tiene una carga negativa, de manera que toque la superficie interior, y luego se retira. ¿Cuál es, entonces, la carga en el conductor y en la esferita?

PROBLEMAS

1. En una región donde existe un campo eléctrico constante E = 2.10^6 N/C Calcule el flujo eléctrico a través de una superficie plana de área 2 m^2 si se coloca
   a) el plano de la superficie perpendicular a la dirección de campo.
   b) el plano de la superficie paralelo a la dirección de campo.
   c) el plano de la superficie formando un ángulo de 50° a la dirección de campo.

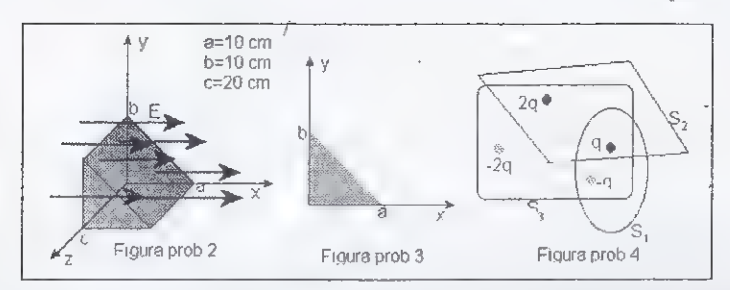


Figura prob 2 Figura prob 3 Figura prob 4

2. En la figura se presenta una caja triangular en una región donde existe un campo eléctrico de intensidad 2.10^5 N/C. Calcule el flujo eléctrico a través cada cara de la caja y de la superficie completa.

3. Un campo eléctrico está dado por $\vec{E} = pz\,\vec{i} + qx\,\vec{j}$ donde p y q son constantes Determine el flujo eléctrico a través de la superficie mostrada en la figura

4. En la figura se muestran tres superficies cerradas S_1, S_2 y S_3, y las cargas puntuales q, -q, 2q y –2q, Encuentre el flujo a través de cada superficie.

5. Una medida del campo eléctrico cerca de la superficie terrestre es 100N/C, apuntando radialmente hacia adentro, asumiendo que ese valor es constante en cualquier punto de la superficie, determine la carga total que debería estar almacenada en la Tierra.

6. Una distribución de carga esférica de radio a tiene una densidad de carga ρ y carga total Q. Concéntrica con esta distribución hay una esfera hueca conductora, no cargada, de radio interno b y radio externo c, como muestra la figura. 4P



a) Determine la intensidad del campo eléctrico en las regiones r < a, a < r < b, b < r < c y r > c.

Figura 4P

b) Determine la carga inducida en las superficies interna y externa de la esfera hueca.

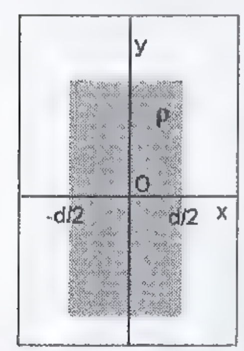


Figura 5P

7. Una distribución de cargas con simetría rectángular de espesor d y densidad volumétrica constante ρ, como muestra la figura 5 a) Demuestre que el campo eléctrico a una distancia x de su centro y dentro de la placa es E = $\rho x / \varepsilon_0$. b) Suponga que un electrón de carga -e y masa m se coloca sin velocidad dentro de la placa a una distancia x del centro, demuestre que el electrón tendrá un movimiento armónico simple con frecuencia dada por

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\rho\ e}{m \cdot \varepsilon_0}}$$

8. Una distribución de cargas positivas con simetría rectángular de espesor d y densidad volumétrica no uniforme dada por $\rho(x) = C\,x^2$ donde x se mide desde el centro de la placa como muestra la figura 5P y C es una constante. La placa es infinita en las direcciones y y z. Deduzca la expresión del campo eléctrico dentro y fuera de la distribución.

9. Considere un cascarón metálico esférico con carga Q, de radio interior R_1 y radio exterior R_2, empleando la ley de Gauss establezca cómo se distribuye la carga y determine el campo eléctrico E(r) en todos los puntos.

10. Determine el campo eléctrico E(r) creado por una distribución contenida en un cascarón cilíndrico de radio R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) muy largo, con densidad de carga ρ constante, para $r \leq R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r \geq R_2$.

11. En el interior de una región esférica de radio R existe distribuida una densidad de carga $\rho(r) = A / r$ donde A es una constante y $0 \leq r \leq R$, determine el valor de A si la carga total es Q y el campo eléctrico E(r) para $r \leq R$ y para $r \geq R$.

CAPITULO 4

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA. POTENCIAL ELÉCTRICO

4.1 INTRODUCCIÓN

En Mecánica muchos problemas se simplifican bastante haciendo consideraciones de energía, de igual manera se puede plantear para los sistemas eléctricos. La energía de un sistema de cargas se puede analizar a través de las contribuciones de las energías potencial y cinética como se hacía en Mecánica. En condiciones estáticas, toda la energía de un sistema de cargas existe en forma de energía potencial denominada energía electrostática. Como la energía potencial está asociada a un campo de fuerzas conservativo, en este capítulo se comprobará que el campo electrostático es conservativo, lo que permitirá definir una función escalar que depende de la posición, a la que se llamará potencial electrostático (o diferencia de potencial eléctrico) analizaremos sus propiedades y sus relaciones.

4.2 ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA DE UNA CARGA PUNTUAL

Si en una región del espacio existe un campo electrostático $\vec{E}(r)$ creado, por ejemplo, por una carga puntual Q, y se desea mover una carga positiva q (carga de prueba) a lo largo de una trayectoria, como muestra la figura 1, la carga q experimentará una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}(r)$, que tratará de sacarla de la trayectoria, para que esto no ocurra, debe aplicarse una fuerza externa sobre ella de igual magnitud y de sentido contrario para equilibrar la que ejerce la carga Q.

Si el desplazamiento de q a lo largo de la trayectoria se considera cuasiestático, o bien, que su energía cinética permanezca constante, entonces es posible calcular el trabajo necesario que debe realizar esa fuerza externa para llevar la carga q desde la posición $\vec{r}_A$ a la posición $\vec{r}_B$.

El trabajo elemental será

$$dW = -\vec{F}.\vec{dl} = -q\vec{E}(r).\vec{dl} \qquad (4.1)$$

el signo negativo es porque se calcula el trabajo realizado por la fuerza externa, en contra de la fuerza ejercida por el campo electrostático. El trabajo total para mover la carga desde la posición A a la B será

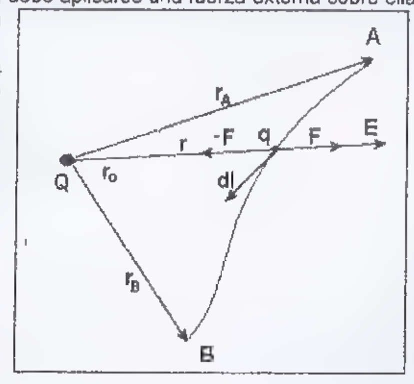


Figura 1

$$W_{AB} = -\int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = -\int_A^B q\vec{E}(r).\vec{dl} \qquad (4.2)$$

como

$$\vec{E}(r)=\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{\vec{r}_o}{r^2} \qquad (4.3)$$

La (4.2) se puede expresar

$$W_{AB}=-\int_A^B q\,\vec{E}(r).\vec{dl}=-\frac{qQ}{4\pi\,\varepsilon_o}\int_A^B\frac{\vec{r}_o.\vec{dl}}{r^2} \qquad (4.4)$$

de la figura 1 se observa que se puede expresar

$$\vec{r}_o.\vec{dl}=dl\cos(\theta)=dr \qquad (4.5)$$

dl cos(θ) es la proyección de $\vec{dl}$ en la dirección de $\vec{r}_o$ y por eso se puede expresar que cualquier desplazamiento $\vec{dl}$ produce un cambio dr en la dirección de $\vec{r}_o$

Haciendo el cálculo de la integral (4.4) resulta

$$W_{AB}=-\frac{qQ}{4\pi\,\varepsilon_o}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}=\frac{qQ}{4\pi\,\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right] \qquad (4.6)$$

Este resultado indica que :

El trabajo que se realiza en un campo electrostático depende de la posición inicial y final, es decir, no depende de la trayectoria. Este importante resultado aunque fuera obtenido a partir de un caso particular, puede generalizarse, permitiendo asegurar que el campo electrostático es conservativo.

Esto significa que el trabajo realizado sobre la carga por la fuerza de origen exterior queda almacenado en forma de energía potencial eléctrica.

A partir del hecho de que el campo electrostático es conservativo es posible definir una magnitud llamada:

DIFERENCIA DE POTENCIAL ELECTRICO V_A-V_B como trabajo por unidad de carga que debe realizar un fuerza externa en contra de la ejercida por el campo electrostático para mover la carga de prueba desde A hasta B, sin que cambie la energía cinética

Matemáticamente resulta

$$V_B-V_A=\frac{W_{AB}}{q}=-\int_A^B\vec{E}(r).\vec{dl} \qquad (4.7)$$

se trata de una integral curvilínea que solo depende de las posiciones de los puntos A y B.

Haciendo un análisis de las unidades involucradas en la definición de la diferencia de potencial surge que

$$[V_B-V_A]=\frac{[W_{AB}]}{[q]}=\frac{Joule}{C}=volt \qquad (4.8)$$

Para el caso de una carga puntual, la diferencia de potencial entre los puntos A y B será, empleando la definición (4.7) y el resultado (4.6)

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q} = -\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \qquad (4.9)$$

Esta expresión escalar siempre queda definida entre dos puntos, de modo que, se debe hablar de una diferencia de esa función entre dos puntos $V_B - V_A$ por esto, es que se dice diferencia de potencial eléctrico.

Siempre es posible calcular esta diferencia respecto de un punto de referencia, si se toma al punto A como el punto de referencia, entonces A = ref., al cual arbitrariamente se le asigna valor cero, es decir $V_{ref} = 0$. En el caso que se tome el punto de referencia en el infinito (es decir, muy lejos de las cargas que generan el campo) resulta que

$$V_B - V_{ref} = -\int_{ref}^{r_B}\vec{E}(r).\vec{dl} \qquad (4.10)$$

entonces

$$V_B = -\int_{\infty}^{r_B}\vec{E}(r).\vec{dl} \qquad (4.11)$$

Se puede decir que el potencial eléctrico en un punto arbitrario B es igual al trabajo necesario por unidad de carga para traer desde infinito una carga de prueba hasta ese punto.

Para el caso de una carga puntual Q

$$V_B = -\int_{\infty}^{r_B}\vec{E}(r).\vec{dl} = -\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\int_{\infty}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_B}\right] \qquad (4.12)$$

Esta expresión permite calcular el potencial eléctrico en un punto, el cual depende del valor de la carga y de la distancia entre el punto en cuestión y la posición de la carga. Analizando un poco más esta expresión, si se considera r_B constante, se genera una superficie esférica en cuyo centro está la carga Q, todos los puntos de esta superficie tienen igual potencial V_B. Para otro valor de r se tiene otro valor de potencial como se visualiza en la figura 2.

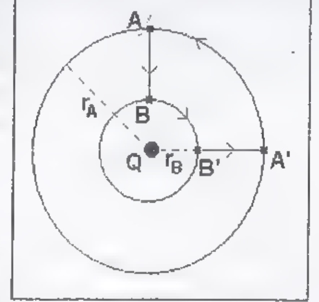


Figura 2

Todos los puntos sobre la esfera de radio r_B tienen potencial V_B, dado por la expresión (4.12) y los puntos que están sobre la esfera de radio r_A, tienen potencial V_A, dada por la misma expresión.

Si se toman dos puntos sobre la esfera de radio r_B tales como B y B' y se calcula el trabajo que se debe hacer en contra del campo electrostático para trasladar la carga q entre ellos dará cero En cambio, para llevarla de A hasta B la expresión de trabajo será (4.6)

De esto se puede concluir que al llevar la carga q desde B hasta A, es decir, en sentido contrario a lo expresado anteriormente, surge

$$W_{BA} = -\frac{qQ}{4\pi\,\varepsilon_o}\int_{r_B}^{r_A}\frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\,\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right] = -W_{AB} \qquad (4.13)$$

Entonces, el trabajo en contra del campo eléctrico creado por la carga Q para que la carga q recorra una trayectoria cerrada, es decir, desde A hasta B y regrese a A es

$$W_{ABB'A'A} = W_{AB} + W_{BB'} + W_{B'A'} + W_{A'A} = W_{AB} + W_{B'A'} = W_{AB} - W_{AB} = 0 \qquad (4.14)$$

si se emplea la definición de potencial

$$W_{ABB'A'A} = q(V_A - V_B) + q(V_B - V_{B'}) + q(V_{B'} - V_{A'}) + q(V_{A'} - V_A) \qquad (4.15)$$

y si lo anterior se expresa en términos del campo eléctrico resulta

$$W_{ABB'A'A} = q\int_A^B \vec{E}\, \vec{dl} - q\int_B^{B'} \vec{E}.\vec{dl} \quad q\int_{B'}^{A'} \vec{E}.\vec{dl} - q\int_{A'}^{A} \vec{E}.\vec{dl} = -q\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = 0 \qquad (4\ 16)$$

como la carga q es distinta de cero, la integral cerrada de la expresión (4.16) debe ser nula. Esto es una consecuencia directa de que el campo electrostático sea conservativo, es decir, que el trabajo calculado no depende de la trayectoria sino de las posiciones inicial y final, entonces se cumple

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = 0 \qquad (4.17)$$

aunque esto fue obtenido para cargas puntuales constituyéndose, por lo tanto en un caso particular, puede generalizarse a todos los casos de campos electrostáticos.

Si considera el teorema de Stokes[3], resulta entonces que

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = \iint_S \left(\nabla \wedge \vec{E}\right).\vec{dS} = 0 \qquad (4.18)$$

por lo tanto, se puede reescribir la (4.17) como

$$\nabla \wedge \vec{E} = 0 \qquad (4.19)$$

Se dice entonces que el campo electrostático es irrotacional por tener su rotor igual a cero. Esto se extiende a cualquier campo conservativo.

4.3 EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LA DEFINICIÓN DE POTENCIAL

Caso 1: Cálculo de la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos ubicados en una región donde existe una placa plana infinitamente grande con densidad de carga σ.

Según la (4.7) la diferencia de potencial entre los puntos A y B en la figura 3, es

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}(r).\vec{dl} \qquad (4.20)$$

El campo existente en esa región es

---

[3] El teorema de Stokes establece que la circulación de un campo vectorial $\vec{A}$ a lo largo de una trayectoria cerrada C es igual al flujo del rotor de $\vec{A}$ a través de la superficie limitada por C, es decir,

$$\oint_C \vec{A}.\vec{dl} = \iint_S \left(\nabla \wedge \vec{A}\right).\vec{dS}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{i} \quad (4.21)$$

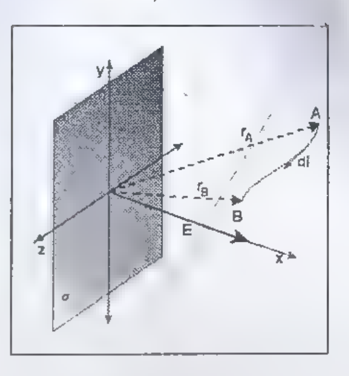


Figura 3

y la expresión del desplazamiento

$$\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \quad (4.22)$$

reemplazando en (4.20) resulta

$$V_B - V_A = -\int_A^B \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{i}\cdot\left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right) = $$
$$= -\int_{x_A}^{x_B} \frac{\sigma}{\varepsilon_o}dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}(x_A - x_B) \quad (4.23)$$

Entonces la diferencia de potencial depende de la distancia $x_A - x_B$, paralela a la dirección del campo, entre los dos puntos A y B y de la densidad superficial de carga σ.

Caso 2: Cálculo del potencial eléctrico creado por un hilo recto cargado con densidad lineal λ, muy largo

El campo existente en esa región es

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o\,r}\vec{r_o} \quad (4.24)$$

y la expresión del desplazamiento

$$\vec{dl} = dr\,\vec{r_o} + rd\theta\,\vec{\theta_o} + dz\,\vec{k} \quad (4.25)$$

La diferencia de potencial resulta

$$V_B - V_A = -\int_A^B \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o\,r}\vec{r_o}\left(dr\,\vec{r_o} + rd\theta\,\vec{\theta_o} + dz\,\vec{k}\right) = -\int_A^B \frac{\lambda\,dr}{2\pi\,\varepsilon_o\,r} = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o}\ln\left(\frac{r_A}{r_B}\right) \quad (4.26)$$

el signo de la diferencia de potencial dependerá de la carga y de la relación entre r_A y r_B.

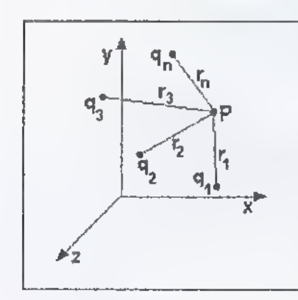


Figura 4

4.4 POTENCIAL ELÉCTRICO CREADO POR UN CONJUNTO DE CARGAS PUNTUALES

Considerando un conjunto de cargas puntuales $q_1, q_2, \ldots q_n$ que se hallan a una distancia $r_1, r_2, \ldots r_n$, respectivamente del punto P como muestra la figura 4, entonces el potencial en ese punto será

$$V_P = V_{1P} + V_{2P} + \ldots + V_{nP} \quad (4.27)$$

empleando la expresión (4.12) se tiene

$$V_P = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{q_2}{r_2} + \ldots + \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{q_n}{r_n} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} \qquad (4.28)$$

Ejemplo

Dentro de las distribuciones de cargas puntuales, existe un caso particular, denominado dipolo eléctrico que consiste en dos cargas de la misma magnitud y de signos distintos, separadas por una distancia a, como muestra la figura 5.

Para determinar el potencial eléctrico en un punto P creado por el dipolo se considera la expresión (4.28) con las restricciones del caso

$$V_P = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{q}{r_2} \qquad (4.29)$$

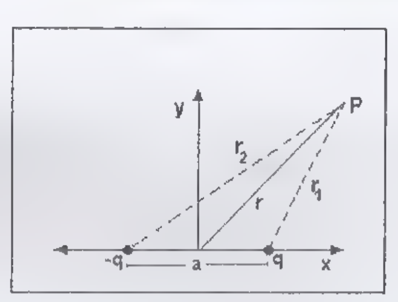


Figura 5

es posible hacer las siguientes aproximaciones si se considera el punto P lo suficientemente alejado del dipolo

$$r_1 \approx r - \frac{a}{2}\cos(\theta) \qquad (4.30.1)$$

$$r_2 \approx r + \frac{a}{2}\cos(\theta) \qquad (4.30.2)$$

donde r es la distancia del centro del dipolo al punto P. Reemplazando en (4.29) y operando resulta

$$V_P(r,\theta) = \frac{q\,a}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{\cos(\theta)}{r^2} \qquad (4.31)$$

Con la expresión se calcula el potencial eléctrico creado por el dipolo en el punto P en función de la distancia r y el ángulo θ.

Recordando que se llama **momento dipolar** eléctrico a la relación

$$p = q\,a \qquad (4.32)$$

A esta magnitud se le da naturaleza vectorial, estableciendo su vector asociado con dirección a lo largo de la recta que une las cargas, sentido desde la carga negativa a la positiva y su módulo está dado por (4.32)

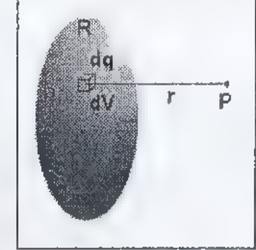


Figura 6

4.5 POTENCIAL ELÉCTRICO CREADO POR UNA DISTRIBUCION DE CARGAS CONTINUA

Si en una región R existe una distribución de carga continua con una densidad volumétrica de carga ρ, es posible calcular el potencial eléctrico que crea esa distribución en un punto P, como muestra la figura 6.

Eligiendo un elemento de carga dq perteneciente a la distribución de carga, a una distancia r del punto P, el potencial será

$$dV_P = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{dq}{r} \qquad (4.33)$$

si se consideran todas las contribuciones de los elementos de cargas se tiene:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_R \frac{dq}{r} \qquad (4.34)$$

donde la integración se realiza sobre la región que contiene la carga
Como dq = ρdv puede escribirse

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iiint_V \frac{\rho\, dv}{r} \qquad (4.35)$$

Esta expresión es semejante a la (4.28).

Ejemplos

1.- Cálculo del potencial en el punto P creado por un hilo recto finito cargado (ver figura)

Se considera un hilo de longitud 2.L con densidad lineal de carga uniforme λ y paralelo al eje z, como muestra la figura 7.

Se elige una carga elemental del hilo dq, que está a una distancia r del punto P, entonces el potencial será:

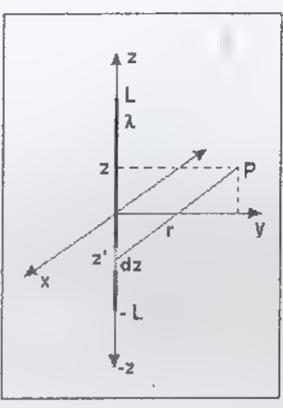


Figura 7

$$dV_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\, dz'}{r} \qquad (4.36)$$

de la figura $r = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$ (4.37)

reemplazando en (4.36)

$$dV_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\, dz'}{\sqrt{a^2 + (z - z')^2}} \qquad (4.38)$$

integrando a lo largo del hilo

$$V_P = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-L}^{L}\frac{dz'}{\sqrt{a^2 + (z - z')^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{L - z + \sqrt{a^2 + (z - L)^2}}{-L - z + \sqrt{a^2 + (z + L)^2}}\right) \qquad (4.39)$$

2.- Cálculo del potencial eléctrico creado por un disco de radio a y densidad superficial de carga σ a una distancia d a lo largo del eje del disco

Considerando un disco con densidad superficial de carga σ uniforme, de radio a, en el plano yz, como muestra la figura 8. Eligiendo una carga elemental del disco dq, que está a una distancia r del punto P, el potencial será

$$dV_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma\, ds}{r} \qquad (4.40)$$

de la figura surge que

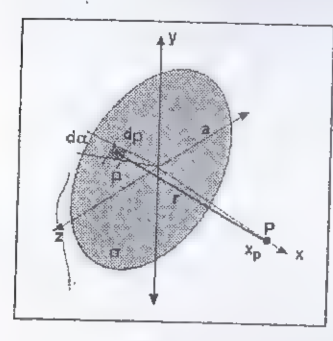


Figura 8

$$ds = \rho\, d\rho\, d\alpha \qquad (4.41)$$

y $$r = \sqrt{\rho^2 + x_p^2} \qquad (4.42)$$

reemplazando e integrando sobre todo el disco

$$V_P = \frac{\sigma}{4\pi\,\varepsilon_o} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{\rho^2 + x_p^2}} = \frac{\sigma\, 2\pi}{4\pi\,\varepsilon_o} \int_0^a \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + x_p^2}} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\sqrt{a^2 + x_p^2} - x_p\right) \qquad (4.43)$$

4.6 EL CAMPO ELÉCTRICO COMO GRADIENTE DEL POTENCIAL

Hasta ahora se ha determinado la función potencial eléctrico V(x, y, z) en una región del espacio conociendo el campo electrostático en esa región.

El problema que se plantea a partir de ahora es:

¿es posible determinar el campo si conocemos el potencial ?

Si se aplica la definición de diferencia de potencial a dos puntos separados por una distancia dl, suponiendo que en esa región, el campo $\vec{E}$ puede ser considerado constante, entonces

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} \qquad (4.44.1)$$

considerando el producto escalar se tiene

$$dV = -E\cos(\theta)\, dl \qquad (4.44.2)$$

haciendo

$$\frac{dV}{dl} = -E\cos(\theta) \qquad (4.44.3)$$

Figura 9

Es posible interpretar mediante la figura 9,

a) si el vector $\vec{dl}$ es tangente a una superficie equipotencial entonces no hay variación de potencial y el cociente

$$\left|\frac{dV}{dl}\right| = 0$$

b) si el vector $\vec{dl}$ es normal a la tangente de una superficie equipotencial, entonces hay una máxima variación de potencial y el cociente

$$\left|\frac{dV}{dl}\right|_{Max} = E$$

c) si el vector $\vec{dl}$ forma un ángulo θ con la tangente de una superficie equipotencial, entonces el cociente toma el valor

$$\left|\frac{dV}{dl}\right| = E\cos(\theta)$$

Haciendo el desarrollo en coordenadas cartesianas de (4.44.1) el vector $\vec{dl}$ tiene como componentes (dx, dy, dz) entonces

$$dV = -\left(E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz\right) \qquad (4.45)$$

Puesto que V es una función de la posición, es decir, de x, y y z, el diferencial total puede expresarse

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \qquad (4.46)$$

Comparando la (4.45) y la (4.46) surge que

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (4.47)$$

Entonces el campo eléctrico puede indicarse como

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \qquad (4.48)$$

o bien

$$\vec{E} = -\nabla V(x,y,z) \qquad (4.49)$$

donde ∇ representa el gradiente de V(x, y, z). El campo eléctrico está indicando la dirección y magnitud de la variación espacial máxima de la función escalar V(x, y, z), el signo negativo indica el sentido contrario de la variación.

El gradiente de una función escalar gráficamente indica la dirección y sentido de máxima variación de la función.

Propiedades del gradiente

El gradiente ∇V es un operador vectorial sobre V (función de la posición) que da información de V en un entorno del punto en el cual se calcula.

a) El sentido de ∇V es aquel en el cual la función escalar V varia más rápidamente.

b) ∇V es perpendicular en cada punto a las superficies equipotenciales.

c) El $|\nabla V|$ es igual al máximo de las derivadas direccionales de V

EJEMPLOS

1.- Determinar el campo creado por una carga puntual a partir del potencial

El potencial generado por una carga puntual q aislada está dado por

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_o\,r} \qquad (4.50)$$

Si se calcula el campo a partir del gradiente, usando su expresión en coordenadas polares

$$\vec{E} = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{r_o} - \frac{\partial V}{r\,\partial\theta}\vec{\theta_o} = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_o\,r^2}\vec{r_o} \qquad (4.51)$$

2.- Determinar el campo creado por un dipolo a partir del potencial

El potencial generado por un dipolo en coordenadas polares está dado por

$$V_p(r,\theta) = \frac{q\,a}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{\cos(\theta)}{r^2} \qquad (4.52)$$

El campo es

$$\vec{E} = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{r_o} - \frac{\partial V}{r\,\partial\theta}\vec{\theta_o} = \frac{2q\,a\cos(\theta)}{4\pi\,\varepsilon_o\,r^3}\vec{r_o} + \frac{q\,a\,sen(\theta)}{4\pi\,\varepsilon_o\,r^3}\vec{\theta_o} \qquad (4.53)$$

4.6.1 SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

El potencial electrostático creado por la carga puntual q está dado por

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_o\,r} \qquad (4.54)$$

Para un valor fijo R, espacialmente queda definida una superficie esférica de radio R, con todos sus puntos a potencial V(R); las superficies que tengan esta propiedad, es decir, que todos sus puntos tienen igual potencial eléctrico, reciben el nombre de **superficies equipotenciales.**

Como ejemplo se toma el caso del dipolo y por cuestiones de simplicidad lo hará en el plano, entonces en vez de trabajar con superficies equipotenciales trataremos con lineas, si

$$V_p(r,\theta) = \frac{q\,a}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{\cos(\theta)}{r^2} = V_o \qquad (4.55)$$

entonces, la ecuación de la línea equipotencial será

$$r(\theta) = A.\sqrt{\cos(\theta)} \qquad (4.56)$$

donde $A=\sqrt{\dfrac{q\,a}{4\pi\,\varepsilon_o V_o}}$ (4.57)

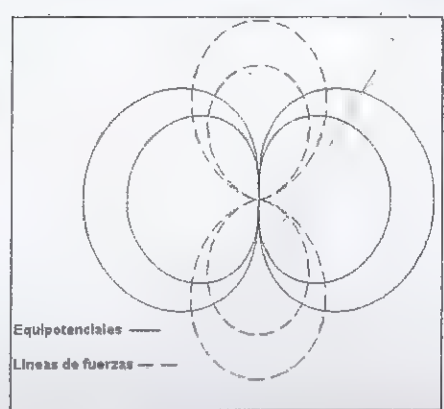


Figura 10

Si una línea L es equipotencial, entonces satisface V(x, y) = C, si se calcula el diferencial resulta

$$dV=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy=0 \qquad (4.58)$$

y considerando la relación con las componentes del campo

$$dV=-E_x\,dx-E_y\,dy=0 \qquad (4.59)$$

entonces, es posible encontrar la expresión de la familia de líneas equipotenciales a partir de las componentes del campo eléctrico haciendo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{E_x}{E_y} \qquad (4.60)$$

Como las líneas de fuerzas del campo eléctrico son tangentes a este, entonces siempre atraviesan las superficies equipotenciales en forma perpendicular y corren en la dirección en la cual el potencial decrece más rápidamente. Las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales son **familias ortogonales**, es decir, en un punto de intersección sus tangentes son perpendiculares[4]. Entonces a partir de esta condición es posible obtener la familia de líneas de fuerzas del campo eléctrico. Haciendo

$$-\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=-\frac{E_x}{E_y} \qquad (4.61)$$

Esto se desarrolló en coordenadas cartesianas, pero puede extenderse a otras coordenadas.

4.6.2 CONDICIONES DE CONTORNO DE LA FUNCION POTENCIAL ELECTRICO

Cuando se analizó el comportamiento del campo eléctrico en la superficie de separación entre dos medios entre los que existía una densidad superficial de carga se demostró que se cumplía

$$E_{2n}-E_{1n}=\frac{\sigma}{\varepsilon_o} \qquad (4.62)$$

esta expresión se puede reescribir en función del potencial eléctrico, si se tiene presente que

$$\vec{E}=-\nabla V \qquad (4.63)$$

[4] Dos rectas perpendiculares entre sí sus pendientes están relacionadas por $m_1=-\dfrac{1}{m_2}$ donde m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas

y si $\vec{n}$ es el vector unitario normal a la superficie de separación entonces

$$E_n = \vec{E}.\vec{n} = -\nabla V.\vec{n} = -\frac{\partial V}{\partial n} \qquad (4.64)$$

la (4.62) resulta

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]_1 - \left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \qquad (4.65)$$

donde los subíndices indican los medios.

4.7 ECUACIONES DE POISSON Y DE LAPLACE

El campo eléctrico para distribuciones de cargas en reposo, se ha demostrado que satisface las siguientes propiedades:

1.- Ley de Gauss

la que expresada en forma integral es:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (4.66)$$

o bien en forma diferencial

$$\nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad (4.67)$$

donde ρ representa la densidad volumétrica de carga existente en esa región.

2.-El campo electrostático es conservativo, esto permite definir la función potencial eléctrico V(x, y, z) tal que

$$\vec{E} = -\nabla V \qquad (4.68)$$

Es posible reunir estas dos propiedades introduciendo la (4.68) en la (4.67) entonces

$$\nabla.(-\nabla V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad (4.69)$$

resulta

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad (4.70)$$

que se conoce como la ecuación de Poisson. Desarrollando en coordenadas cartesianas es:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad (4.71)$$

constituye una ecuación diferencial de derivadas parciales y de segundo orden, donde la inhomogeneidad está dada por la densidad de carga existente en la región. Si en la región bajo estudio no hay cargas, entonces la ecuación (4.71) se reduce a la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 V = 0 \qquad (4.72)$$

en coordenadas cartesianas es

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (4.73)$$

4.7.1 Solución numérica de la ecuación de Laplace

Dada una región del plano x,y si se conoce el valor del potencial eléctrico en todos los puntos de su contorno, queda unívocamente definido el potencial eléctrico en todos los puntos interiores de la región. Un método para lograr esta determinación es el método de diferencia finita, para ello se considera una función V(x,y), que puede ser desarrollada alrededor de un punto (x+h, y) en serie de Taylor:

$$V(x+h,y) \cong V(x,y) + \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} h + \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} \qquad (4.74)$$

Repitiendo el desarrollo de Taylor alrededor del punto (x-h, y)

$$V(x-h,y) \cong V(x,y) - \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} h + \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} \qquad (4.75)$$

sumando miembro a miembro (4.74) y (4.75), y agrupando, se despeja el término en derivada segunda resultando:

$$\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2} \cong \frac{V(x-h,y) - 2V(x,y) + V(x+h,y)}{h^2} \qquad (4.76)$$

De forma similar se obtiene la expresión para la otra coordenada *y*:

$$\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2} \cong \frac{V(x,y-h) - 2V(x,y) + V(x,y+h)}{h^2} \qquad (4.77)$$

Empleando la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad (4.78)$$

y sustituyendo las derivadas segundas por sus aproximaciones (4.76) y (4.77) se puede expresar (4.78) en la siguiente forma:

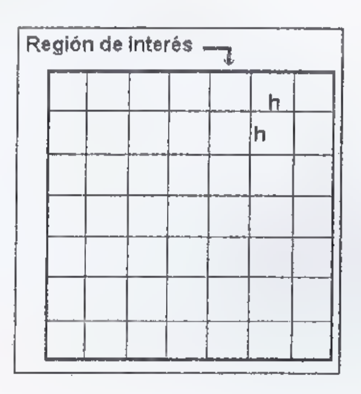


Figura 11

$$\frac{V(x-h,y)+V(x+h,y)+V(x,y+h)+V(x,y-h)\quad 4V(x,y)}{h^2}=0 \qquad (4.79)$$

Despejando V(x,y) de (4.79) se tiene

$$V(x,y)=\frac{V(x+h,y)+V(x-h,y)+V(x,y+h)+V(x,y-h)}{4} \qquad (4.80)$$

Lo que significa que el valor del potencial en un punto es el promedio de los valores de potencial en los puntos vecinos.

Para aplicar este método se debe hacer un reticulado que cubra la región de interés, donde cada retículo puede ser cuadrado de lado h, como muestra la figura 11.

Cuanto menor sea h más aproximados son los valores obtenidos por (4.80) al potencial eléctrico en ese punto, es evidente que se trata de un cálculo de tipo discreto

Ejemplo:

Cálculo del potencial eléctrico en todos los puntos de intersección del retículo contenido por la región de la figura 12

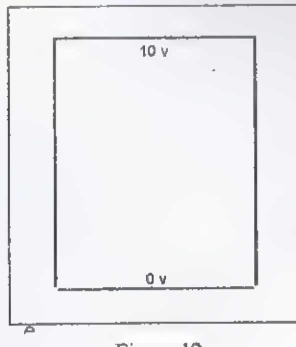


Figura 12

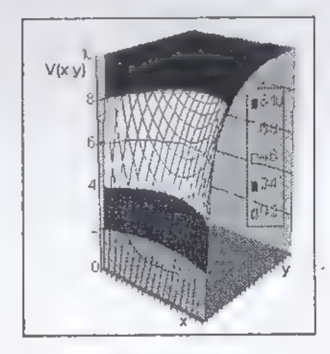


Figura 13

puede emplear una planilla de cálculo (por ejemplo EXCEL), donde cada celda representa un punto de intersección del reticulado. Se define la región y a las celdas pertenecientes al borde se le asignan los valores de contorno (valores de los electrodos) y en cada celda interior se escribe la fórmula (4.80). Teniendo en cuenta los valores referenciados a los vecinos de esa celda, adaptando la planilla a un cálculo iterativo, el utilitario recalcula en forma automática toda la región. Los valores resultantes pueden ser visualizados mediante una gráfica del tipo V(x,y) como muestra la figura 13.

4.8 ENERGIA POTENCIAL DE UN GRUPO DE CARGAS PUNTUALES

Cuando se habla de energía electrostática de un conjunto de n cargas puntuales se refiere a la energía que fue necesaria suministrar al sistema para agrupar este conjunto de cargas que inicialmente se hallaban ubicadas en el espacio donde la interacción entre ellas era nula (esto es, en el infinito).

Esta energía puede obtenerse calculando el trabajo necesario para juntar las cargas, acercando una por vez La primera carga q_1 puede colocarse en suposición sin gasto de energía. Cuando se acerca la segunda carga q_2 a una distancia $r_{12}=\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|$ el trabajo requerido es

$$W_2 = q_2 V_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\,\varepsilon_o\, r_{12}} \qquad (4.81)$$

Obsérvese que si q_2 es la primer carga y se acerca q_1 como segunda carga, el trabajo necesario es el mismo.

$$W_1 = q_1 V_{21} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\,\varepsilon_o\, r_{21}} \qquad (4.82)$$

con $r_{21} = r_{12}$ de modo que $W_1 = W_2$

Cuando acercamos una tercera carga q_3 el trabajo será

$$W_3 = q_2 V_{12} + q_3 V_{13} + q_3 V_{23} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\,\varepsilon_o\, r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\,\varepsilon_o\, r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\,\varepsilon_o\, r_{23}} \qquad (4.83)$$

Teniendo en cuenta la consideración anterior, la (4.83) puede expresarse

$$W_3 = \frac{1}{8\pi\,\varepsilon_o}\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_1}{r_{21}} + \frac{q_3 q_1}{r_{31}} + \frac{q_3 q_2}{r_{32}}\right] \qquad (4.84)$$

con $r_{13} = r_{31}$ y $r_{23} = r_{32}$ entonces

$$W_3 = \frac{1}{8\pi\,\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad \text{con } i \neq j \qquad (4.85)$$

La energía electrostática total del sistema de n cargas puntuales puede expresarse

$$W = \frac{1}{8\pi\,\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad \text{con } i \neq j \qquad (4.86)$$

si se tienen en consideración que el potencial eléctrico de n cargas en la posición de la carga i – ésima es:

$$V_i = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{r_{ij}} \qquad (4.87)$$

Entonces la expresión (4.86) resulta

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i \qquad (4.88)$$

debe tenerse presente que en esta expresión no está incluida la energía necesaria para construir cada carga "puntual" la que recibe el nombre de energía propia.

CUESTIONARIO

1. ¿Una carga eléctrica positiva se desplaza de una superficie potencial a otra de mayor o menor valor de potencial?
2. ¿Qué consideraciones puede hacer sobre un conductor esférico aislado cargado positivamente?
3. ¿Dos superficies equipotenciales diferentes pueden interceptarse?
4. Si en una región del espacio el potencial eléctrico es constante ¿qué puede decirse sobre el campo eléctrico en esa región?
5. Si se conoce el valor del campo eléctrico en un punto ¿es posible calcular el potencial eléctrico en ese punto? Si no se puede ¿qué información falta?
6. Si el campo eléctrico es cero en una región, puede decir que también el potencial eléctrico es cero.
7. Explique la diferencia entre energía potencial eléctrica y potencial eléctrico.
8. ¿Cómo puede protegerse un dispositivo electrónico de campos eléctricos externos?
9. En condiciones estáticas, ¿porqué todos los puntos de un conductor están al mismo potencial?
10. ¿Qué relación se cumple entre las líneas de fuerzas del campo eléctrico y las superficies equipotenciales?

PROBLEMAS

1 a)Calcule la diferencia de potencial entre A y B de una región donde existe un campo eléctrico creado por una carga puntual (ver figura 1p). b)Suponiendo que el punto A está infinitamente lejos de la carga Q, ¿cuál sería la diferencia de potencial entre ese punto y el punto B? c) Analizando este resultado represente gráficamente los puntos del espacio que tengan igual diferencia de potencial.

2 La separación más probable entre el electrón y el núcleo de H (un protón) es igual a ro = $5{,}29.10^{-11}$ m. Considerando el protón como núcleo del H, calcule el potencial eléctrico V creado por él, a una distancia r_o del mismo. Calcule la energía potencial eléctrica U del átomo.

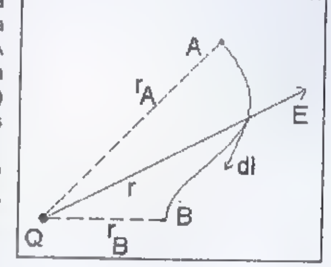


Figura 1P

3 Determine el potencial eléctrico de la distribución de cargas puntuales mostradas en la figura 2P, en el punto P. El valor de las cargas son $Q_1 = 10^{-6}$ C, $Q_2 = -2\ 10^{-6}$ C, $Q_3 = 3.10^{-6}$ C y $Q_4 = -2.10^{-6}$ C. La distancia L = 0.1 m.

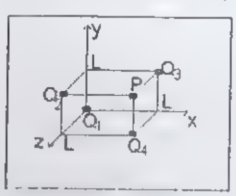


Figura 2P

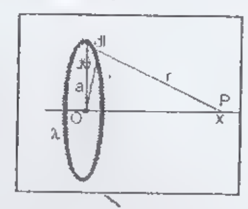


Figura 3P

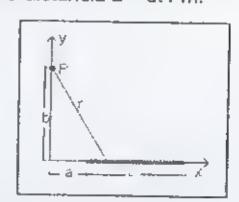


Figura 4P

4 Considere un anillo de radio a que posee una carga Q distribuida uniformemente. Determine el potencial eléctrico en un punto P sobre el eje del disco, a una distancia x de su centro. Analice los casos $x >> a$; $x << a$ y $x = 0$. Figura 3P.

5 Considere una barra delgada de longitud L que posee una carga Q distribuida uniformemente. Determine el potencial eléctrico en un punto P a una distancia b a lo largo del eje y positivo, como muestra la figura.4P

6 Una esfera conductora de radio a está conectada a una batería de potencial eléctrico V1; rodeando a ésta se encuentra otra esfera conductora de radio b que puede o no estar conectada a la batería V2. (Ver figura 5P) a) Si el interruptor A está cerrado y el B abierto, calcular E(r) para $r < a$; $a < r < b$; $r > b$. b) si el interruptor A está abierto y el B cerrado calcular E(r) para los mismos puntos que en el caso anterior. c) Suponga que V2 = 0, repita el cálculo si los interruptores A y B están cerrados. d) Suponga que los dos interruptores están cerrados, repita el cálculo.

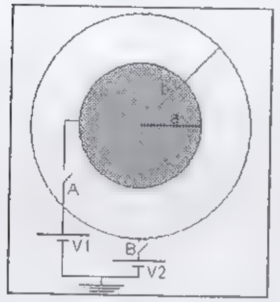


Figura 5P

7 Dada una esfera conductora de radio R con carga Q, calcular V(r) para $r > R$ y $r < R$. Considerar V(r) = 0 si se toma r infinitamente lejos de la esfera.

8 Calcule la diferencia de potencial V_{AB} debido a una distribución cilíndrica de carga de radio R y densidad de carga ρ. Los puntos A y B está indicados en la figura 6P

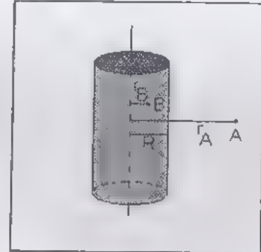


Figura 6P

9 ¿Cuántos electrones se deben quitar a un conductor esférico inicialmente descargado de radio 0.3 m para producir un potencial de 10kV en la superficie?



Figura 7P

10 Dos esferas conductoras de radio 0.1m y 0.4m respectivamente, están muy separadas pero conectadas con un hilo conductor, como se muestra en la figura 7P. Se deposita una carga total de 20 μC en esta combinación de esferas. a) ¿Cómo se distribuye la carga?. b) ¿cuál es el potencial eléctrico de cada esfera?. c) ¿cuál es el campo eléctrico de cada esfera?

11 Se puede demostrar que el potencial eléctrico de un dipolo con momento dipolar p = q.a está dado por

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{p\cos(\theta)}{r}$$

a) Determine las componentes del campo eléctrico
b) En el plano, trace algunas líneas equipotenciales.

CAPITULO 5

CAPACIDAD

5.1 INTRODUCCIÓN

El objetivo de este capitulo es estudiar la relación que existe entre la diferencia de potencial entre dos cuerpos conductores y la carga que tienen y las propiedades que surgen de esta relación.

Con estos conductores es posible construir un dispositivo llamado condensador que es un elemento de circuito convencional que tiene la propiedad de almacenar energía y se lo usa como filtro y temporizador en circuitos electrónicos.

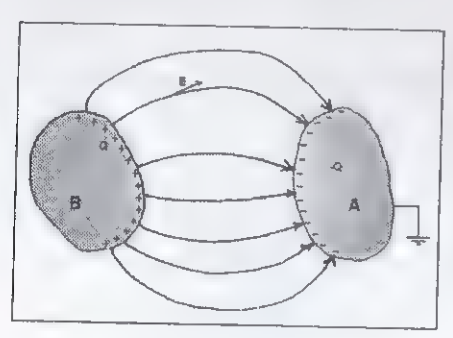


Figura 1

5.2 DEFINICIÓN DE CAPACIDAD

Si se tienen dos cuerpos conductores A y B, de forma arbitraria, el conductor A se conecta a tierra y al B se carga con +Q, de modo que, por la proximidad se induce una carga -Q en el conductor A, entonces todas las líneas de fuerzas del campo eléctrico que salgan del conductor B llegan al A y además mantendremos la distancia relativa entre ambos constante.

La diferencia de potencial entre los dos conductores está dada por la expresión

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.\vec{dl} \qquad (5.1)$$

Esta diferencia de potencial no depende de la trayectoria, pero sí del campo eléctrico que dependerá de dos factores:

a) De la geometría del sistema, es decir, de la forma de los electrodos y de su separación, en general, esta dependencia es muy complicada salvo para aquellos casos que poseen gran simetría.

b) Del valor Q de las cargas de los conductores. Esta última dependencia es muy simple y es independiente de la geometría del sistema.

5.1.1 Obtención de la relación

Dejando la forma y la posición relativa de los conductores fija y se incrementa el valor de la carga del conductor B en un factor constante, $Q' = \lambda Q$, entonces se induce -Q' en el conductor A.

La configuración de la carga será la misma que antes, salvo que ahora la densidad de la carga se incrementa en el mismo factor λ. Esta nueva distribución de carga incrementará la densidad de líneas de campo en el mismo factor pero, las líneas de campo serán idénticas a las

originales. En otras palabras, el aumento en el factor λ de la carga aumentará en el mismo factor el valor del campo eléctrico en todos los puntos del espacio, esto indica que existe una proporcionalidad directa entre las carga y el campo.

$$Q \propto E \qquad (5.2)$$

Si Q'= λ Q entonces **E**'= λ **E** manteniendo la geometría del sistema.
En consecuencia, considerando (5.1) y (5.2) se puede hacer

$$(V_B - V_A)' = -\int_A^B \vec{E}'.\vec{dl} = -\int_A^B \lambda\,\vec{E}.\vec{dl} = \lambda\left[-\int_A^B \vec{E}.\vec{dl}\right] \qquad (5.3)$$

$$(V_B - V_A)' = \lambda\,(V_B - V_A) \qquad (5.4)$$

lo que demuestra que el tipo de relación que existe entre la diferencia de potencial entre los dos conductores y la carga, cuando constituyen un sistema aislado, es una proporcionalidad directa

$$Q = C\,(V_B - V_A) \qquad (5.5)$$

5.2.2 Definición de la Capacidad

En la fórmula (5.5), esta constante de proporcionalidad se llama CAPACIDAD del sistema constituido por los dos conductores y el sistema en sí, se llama CONDENSADOR.

Por lo tanto, la carga sobre uno cualquiera de los conductores del condensador es igual al producto de su capacidad por la diferencia de potencial entre los conductores. Una forma explícita que permite definir la capacidad de forma operativa es despejando C de la ecuación (5.5)

$$C = \frac{Q}{V_B - V_A} \qquad (5.6)$$

La capacidad de un condensador se define como la magnitud de la carga sobre cualquiera de los conductores dividida la diferencia de potencial.

A los conductores se los denomina electrodos, placas o armaduras del condensador.
La unidad de capacidad se deduce de la ecuación (5.6)

$$[C] = \frac{\text{carga eléctrica}}{\text{diferencia de potencial}} = \frac{\text{carga eléctrica}}{\frac{\text{trabajo}}{\text{carga eléctrica}}} = \frac{(\text{carga eléctrica})^2}{\text{trabajo}}$$

En el sistema MKSA

$$[C] = \frac{Coulomb}{Volt} = faradio\,(F)$$

La unidad de capacidad recibió este nombre en homenaje a Michael Faraday que realizó importantes contribuciones a la ciencia, en particular, en el área del electromagnetismo.

Normalmente esta unidad, para los fines prácticos, resulta muy elevada, de modo que se emplean submúltiplos de la misma

$1mF = 10^{-3} F$
$1\mu F = 10^{-6} F$
$1nF = 10^{-9} F$
$1pF = 10^{-12} F$

5.2.3 Cálculo de la capacidad

Para realizar el cálculo de la capacidad de cualquier arreglo de conductores es posible seguir una secuencia. Para aplicar la ecuación (5.6) se debe conocer previamente la diferencia de potencial entre los conductores (ecuación 5.1) y para calcular esta se necesita como dato el campo eléctrico entre los conductores, entonces la secuencia de cálculo debe ser:

1. Calcular el campo eléctrico entre los conductores, por el método que sea posible (ley de Gauss, integración directa, etc.).
2. Calcular la diferencia de potencial entre los conductores, empleando la ecuación (5.1).
3. Calcular la capacidad utilizando la ecuación. (5.6)

5.3 APLICACIONES

5.3.1 Cálculo de la capacidad de una esfera conductora aislada

Una esfera conductora de radio R con carga Q, genera un campo eléctrico en un punto exterior de la misma

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\vec{r_o}}{r^2} \qquad (5.7)$$

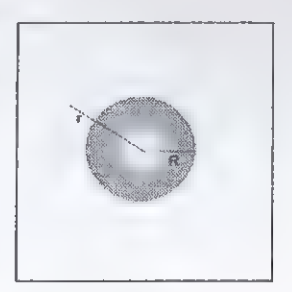


Figura 2

Como la esfera conductora está aislada, el cálculo de la diferencia de potencial debe hacerse tomando el infinito como referencia, entonces

$$V(R) = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}(r).\vec{dl} = -\int_{\infty}^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\vec{r_o}}{r^2}.\vec{dl} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\infty}^{R} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} \qquad (5.8)$$

aplicando la ecuación (5.6) resulta

$$C = \frac{Q}{V(R)} = 4\pi\varepsilon_o R \qquad (5.9)$$

En donde se observa que una esfera conductora de radio R tiene una capacidad que depende de su radio (es decir, de su geometría) y del medio que la rodea, en este caso vacío, nótese que para una esfera de radio 1cm la capacidad es 1,1pF.

5.3.2 Cálculo de la capacidad de un condensador plano

Un condensador plano es una configuración de dos conductores planos paralelos de áreas enfrentadas A, separados por una distancia d y con carga +Q y - Q respectivamente, como se muestra en la figura 3.

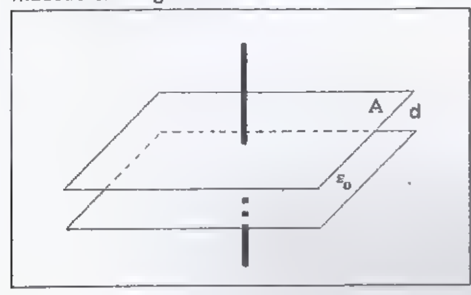


Figura 3

El campo eléctrico entre los conductores, se obtiene empleando la ley de Gauss.

Como la densidad de carga es

$$\sigma = \frac{Q}{A} \qquad (5.10)$$

El campo resulta

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \qquad (5.11)$$

La diferencia de potencial entre las placas será

$$\Delta V = -\int_d^0 \frac{\sigma}{\varepsilon_o} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} d = \frac{Qd}{\varepsilon_o A} \qquad (5\ 12)$$

aplicando la definición de capacidad resulta

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_o A}{d} \qquad (5.13)$$

La capacidad de un condensador plano depende del área A de los conductores planos y de la separación entre las placas d, es decir, de la geometría de la configuración como previamente se había plânteado y también del medio (en este caso vacio).

En este cálculo se emplea una expresión de campo eléctrico constante que surge de considerar planos conductores infinitos. Es evidente que no se disponen de este tipo de conductores y por lo tanto, de campos eléctricos uniformes entre conductores. Si los conductores son planos de dimensiones finitas y la separación entre ellos es pequeña, el campo presentará cierta uniformidad que se pierde en la zona cercana a los bordes, este efecto de borde puede ser reducido empleando un dispositivo llamado anillo de guarda.

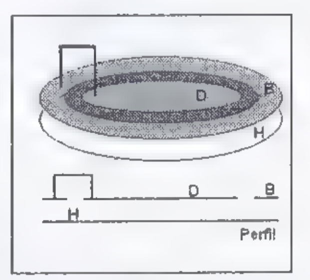


Figura 4

Si se considera, por ejemplo, que las placas son circulares y a una de ellas se le practica una ranura muy delgada que separa el disco D de área A de un anillo B y se conectan entre sí como muestra la figura 4, esto recibe el nombre de anillo de guarda. La otra placa (conductor H) está separada una distancia d y se cubre la ranura. Las líneas de campo creadas por los conductores separados por la ranura se compensan produciendo una corrección del efecto de borde.

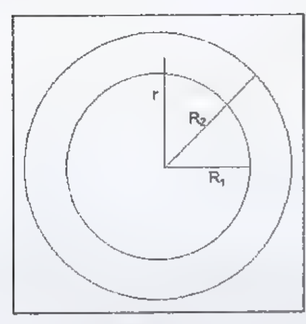


Figura 5

5.3.3 Cálculo de la capacidad de un condensador esférico

Si se consideran dos conductores esféricos de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) concéntricos, con cargas +Q y -Q respectivamente, ver figura 5. El campo eléctrico entre las dos esferas, determinado a través de la ley de Gauss es

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o} \frac{\vec{r_o}}{r^2} \qquad (5.14)$$

el cálculo de la diferencia de potencial entre los conductores es

$$V(R_1) - V(R_2) = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}(r).\vec{dl} = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o} \frac{\vec{r_o}}{r^2}.\vec{dl} = -\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] \qquad (5.15)$$

ordenando se tiene

$$V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right] \qquad (5.16)$$

La capacidad, entonces, vendrá dada por

$$C = \frac{Q}{V(R_1) - V(R_2)} = \frac{4\pi\,\varepsilon_o R_1 R_2}{(R_2 - R_1)} \qquad (5.17)$$

Si se analiza la expresión anterior, se comprueba la dependencia con los parámetros geométricos de la configuración de conductores, es decir, depende de los radios.

Para el caso en que los radios aproximadamente iguales ($R_1 \cong R_2$) en la expresión de la capacidad se puede ajustar $R_1 . R_2 \cong R^2$ y $R_2 - R_1 = d$ quedando

$$C = \frac{4\pi\,\varepsilon_o R^2}{d} \qquad (5.18)$$

como el área de la esfera es $A = 4\pi\,R^2$ resulta

$$C = \frac{\varepsilon_o A}{d} \qquad (5.19)$$

Por lo tanto, con esta aproximación la capacidad de un condensador esférico coincide con la de uno plano.

5.4 REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA DE UN CONDENSADOR

El símbolo que se emplea para representar un condensador en un circuito eléctrico concuerda con el esquema de un condensador plano, independientemente del tipo de condensador que represente.

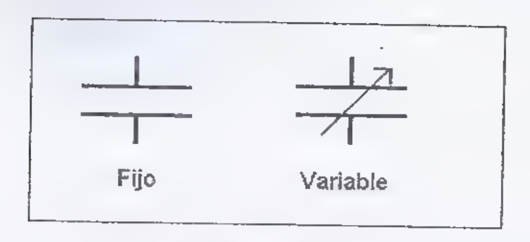


Figura 6

La figura 6 muestra un condensador de valor fijo y otro con capacidad variable.

5.5 ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

En los circuitos en general, aparecen combinaciones de condensadores esto ocurre, porque comercialmente no se pueden fabricar condensadores de todos los valores que se necesiten, entonces al asociarlos en una red es posible lograr el valor de capacidad que es de interés. La idea básica es reemplazar un condensador por una asociación de condensadores, o bien recíprocamente, de modo que cumpla las mismas propiedades eléctricas que aquel, es decir, para una carga determinada está a una diferencia de potencial definida. Esquemáticamente, esto se muestra en la figura 7

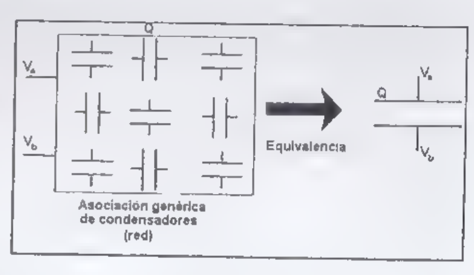


Figura 7

Debe tenerse presente que para ambas situaciones la capacidad se calcula empleando la ecuación 5.6. Dentro de las asociaciones de condensadores más típicas están las asociaciones en paralelo y en serie, que se desarrolla a continuación.

5.5.1 Asociación en paralelo

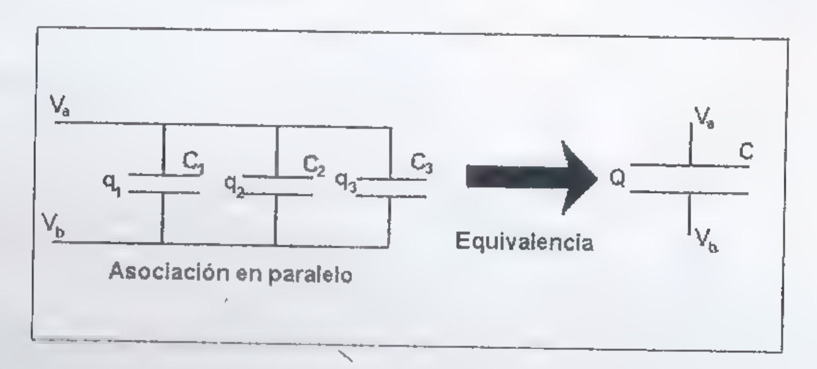


Figura 8

Una asociación en paralelo es un arreglo de condensadores como el mostrado en la figura 8, donde sobre cada condensador existe la MISMA diferencia de potencial, si los condensadores tienen valores diferentes entonces tendrán valores de cargas distintos, la suma de las cargas positivas almacenadas en cada condensador será la carga total del arreglo, si q_1, q_2 y q_3 son las cargas de los condensadores C_1, C_2 y C_3 respectivamente, entonces

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 \qquad (5.20)$$

Aplicando la definición de capacidad y sacando factor común la diferencia de potencial que es constante sobre cada condensador se tiene

$$Q = C_1(V_B - V_A) + C_2(V_B - V_A) + C_3(V_B - V_A) = (C_1 + C_2 + C_3)(V_B - V_A) \qquad (5.21)$$

Entonces la capacidad equivalente del arreglo será

$$C_{equi} = C_1 + C_2 + C_3 \qquad (5.22)$$

Se puede concluir que, un conjunto de condensadores asociados en paralelo es equivalente a un solo condensador cuya capacidad es igual a la suma de las capacidades de los condensadores asociados.

Obsérvese que con esta asociación es posible obtener valores mayores de capacidad, pero debe tenerse presente la limitación de la diferencia de potencial $V_B - V_A$ que no debe superar el valor límite de la diferencia de potencial de cada condensador.

5.5.2 Asociación en serie

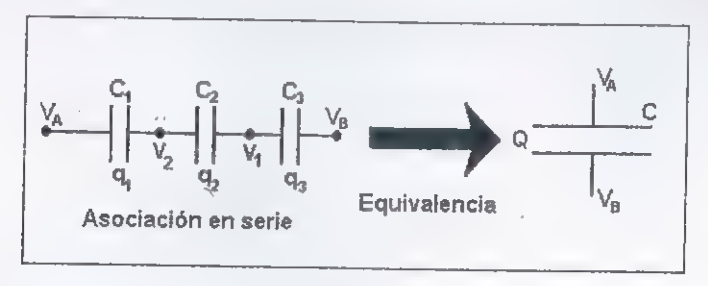


Figura 9

Una asociación de condensadores en serie es un arreglo, se como muestra la figura 9, donde la placa de la derecha de un condensador se conecta a la placa izquierda del siguiente. Si el conjunto está inicialmente descargado y se le aplica una diferencia de potencial, $V_B - V_A$, la placa izquierda del condensador C_1 toma la carga +Q e induce una -Q sobre la otra placa, estableciéndose sobre este condensador una diferencia de potencial $V_1 - V_A$, la placa izquierda del condensador C_2 toma la carga +Q por inducción , de igual modo, la otra placa adquiere la carga -Q, produciéndose una diferencia de potencial $V_1 - V_2$, lo mismo pasa en el condensador C_3. Se puede escribir entonces

$$V_B - V_A = (V_B - V_2) + (V_2 - V_1) + (V_1 - V_A) \qquad (5.23)$$

Aplicando la definición de capacidad

$$V_B - V_A = \frac{Q}{C_3} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_1} \qquad (5.24)$$

sacando factor común Q y haciendo pasaje del factor al primer miembro

$$\frac{V_B - V_A}{Q} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1} \qquad (5.25)$$

La inversa de la capacidad equivalente será

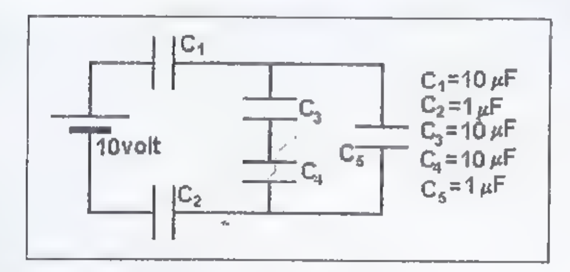
$$\frac{1}{C_{equi}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \qquad (5.26)$$

Entonces, una asociación de condensadores en serie equivale a un único condensador tal que la inversa de su capacidad es la suma de las inversas de las capacidades de los condensadores integrantes de la asociación.

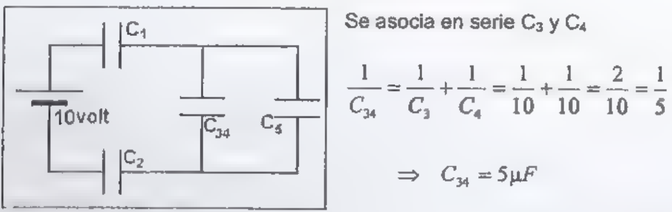
La capacidad equivalente es menor que la capacidad de los condensadores asociados, la diferencia de potencial aplicada sobre cada elemento es inferior a la de los extremos A y B, entonces esta asociación permite dividir la diferencia de potencial aplicada en partes que son perfectamente soportables por cada condensador.

Ejemplo

a) Calcular la capacidad equivalente del circuito de la figura
b) Si la diferencia de potencial V_b-V_a = 10 volt, determine la carga y la diferencia de potencial sobre cada uno de los condensadores.



a) Cálculo de la capacidad equivalente



Se asocia en serie C_3 y C_4

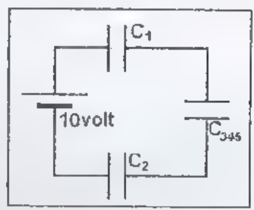
$$\frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad C_{34} = 5\mu F$$

Ahora se asocia en paralelo C_{34} y C_5

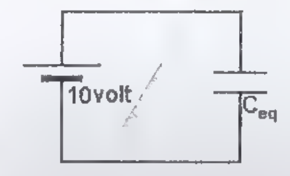
$C_{345} = C_{34} + C_5 = 5\mu F + 1\mu F = 6\mu F$

La capacidad equivalente C_{eq} del circuito se obtiene al asociar C_1, C_2 y C_{345} en serie



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{345}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} = \frac{76}{60}\frac{1}{\mu F} \Rightarrow \quad C_{eq} = 0{,}7894\,\mu F$$

b) Cálculo de la carga y diferencia de potencial sobre cada condensador del circuito
La carga del condensador equivalente es



$$Q_{total} = C_{eq}.10\,V = 0{,}7894.10^{-6}\,F.10\,V = 0{,}7894.10^{-5}\,C$$

Como C_1, C_2 y C_{345} están asociados en serie están cargados con la misma carga igual a la del C_{eq}, es decir

$$Q_1 = Q_2 = Q_{345} = 0{,}7894.10^{-5}\,C$$

Con lo que se puede calcular las diferencias de potencial:

Sobre el condensador C_1

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{0.789410^{-5}\,C}{1010^{-6}\,F} = 0{,}7894\,V$$

Sobre el condensador equivalente C_{345}

$$V_{345} = \frac{Q_{345}}{C_{345}} = \frac{0{,}7894.10^{-5}\,C}{6.10^{-6}\,F} = 1{,}316\,V$$

Sobre el condensador C_2

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{0{,}789.10^{-5}\,C}{1.10^{-6}\,F} = 7{,}894\,V$$

Una forma de verificar el resultado anterior es la suma de los tres potenciales debe coincidir con el valor de la fuente

$$V_1 + V_{345} + V_2 = 9{,}99\,V$$

La diferencia de potencial V_{345} está aplicada sobre la asociación en serie de C_3 y C_4, de modo que es posible calcular la carga sobre esta asociación como

$$Q_{34} = C_{34}\,V_{345} = 5.10^{-6}\,F.1{,}316\,V = 6{,}578.10^{-6}\,C$$

debido al tipo de asociación entre C_3 y C_4 se cumple

$$Q_{34} = Q_3 = Q_4$$

Por lo tanto, la diferencia de potencial sobre cada uno es
En el condensador C_3

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{6{,}578.10^{-6}\,C}{10.10^{-6}\,F} = 0{,}658\,V$$

En el condensador C_4

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{6{,}578.10^{-6}C}{10.10^{-6}F} = 0{,}658\,V$$

Finalmente sobre el condensador C_5 se conoce la diferencia de potencial V_{345} y entonces se puede calcular la carga del mismo como

$$Q_5 = C_5 V_{345} = 1.10^{-6}F\,1{,}316\,volt = 1{,}31610^{-6}\,C$$

5.6 ENERGÍA EN CONDENSADORES Y CAMPOS ELÉCTRICOS

Dado un condensador que inicialmente está cargado con cargas +Q y -Q en sus placas y se desea transferir una carga elemental dQ desde la placa cargada negativa a la positiva, para ello es necesario realizar un trabajo, en contra del campo eléctrico que existe entre las placas, para determinar este trabajo se hace uso de la definición de potencial eléctrico en términos de la energía potencial eléctrica y de la cantidad de carga de prueba esto es

$$dU = V\,dQ \qquad (5.27)$$

con Q = C.V y C es la capacidad, que solo depende la geometría del sistema, como se demostró anteriormente, entonces

$$dQ = C\,dV \qquad (5.28)$$

Se puede expresar la variación infinitesimal de la energía potencial eléctrica como

$$dU = CV\,dV \qquad (5.29)$$

El cambio de la energía potencial eléctrica total en el condensador si inicialmente está descargado es decir, V = 0, y se lo lleva a un estado final de carga con V = V, se obtiene por integración de (5.29). Durante tal proceso la energía cambia de un valor U = 0, en el estado inicial, hasta el valor final U = U ,de manera que

$$\int_0^U dU = \int_0^V CV\,dV \qquad (5.30)$$

como C es una constante, integrando resulta

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \qquad (5.31)$$

Esta expresión representa la energía potencial eléctrica almacenada en un condensador de capacidad C que se encuentra a la diferencia de potencial V. También se puede expresar en términos de la carga, empleando Q = C V esto es

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad (5.32)$$

A continuación se establecerá el vínculo entre la energía almacenada en un condensador y el campo eléctrico existente entre sus placas, para ello se analiza el caso particular de un

condensador plano de área A y separación entre las placas d y se calcula la energía almacenada cuando tiene aplicado una diferencia de potencial V. La capacidad de un condensador plano es

$$C = \frac{\varepsilon_o A}{d} \qquad (5.33)$$

y la diferencia de potencial expresada en términos del campo se puede escribir

$$V = E d \qquad (5.34)$$

reemplazando en la (5.31)

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_o A}{d} (E d)^2 \qquad (5.35)$$

Luego de hacer las reducciones necesarias se observa que en el numerador queda el volumen de la región entre las placas del condensador plano Vol = Ad entonces se puede definir una cantidad denominada densidad de energía ω como la energía potencial eléctrica por unidad de volumen, se obtiene

$$\omega = \frac{U}{Vol} = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} \qquad (5.36)$$

Aunque la deducción fue hecha empleando un condensador plano, la expresión obtenida tiene validez general y expresa que la densidad de energía eléctrica en cada punto del espacio está relacionada con el módulo del campo eléctrico al cuadrado en ese punto.

La densidad de energía así definida es muy útil, porque permite calcular el valor de la energía total y además no hace referencia a las cargas eléctricas en forma individual.

Si se hace pasaje de términos y se integra en el volumen Vol la energía eléctrica U almacenada en dicho volumen queda expresada

$$U = \frac{\varepsilon_o}{2} \int_V E^2 \, dVol \qquad (5.37)$$

La integración se extiende a toda la región donde el campo no es nulo.

5.6.1 Fuerzas entre las placas de un condensador plano

Se va a emplear el concepto de densidad de energía desarrollado en el artículo anterior para calcular la fuerza entre las placas de un condensador plano cargado. Si la separación entre las placas es x y siendo A el área de las mismas y además si se llama a la fuerza F_x sobre cada placa que está en el sentido decreciente de las x, el trabajo necesario para separar las placas una distancia dx es

$$dW = -F_x \, dx \qquad (5.38)$$

La variación de la energía almacenada debe ser igual al trabajo suministrado por la fuerza externa - F_x

$$dU = dW = -F_x \, dx \qquad (5.39)$$

Entonces la fuerza se puede expresar como

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \qquad (5.40)$$

Consideremos ahora dos situaciones:

a) El condensador está cargado y aislado, esto significa que la carga es constante, la expresión de la energía es

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 x}{\varepsilon_o A} \qquad (5.41)$$

La variación de la energía almacenada debe ser igual al trabajo suministrado por la fuerza externa $-F_x$

$$dU = dW = -F_x\,dx \qquad (5.42)$$

Calculando la fuerza

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_o A} \qquad (5.43)$$

si se multiplica y se divide por $\varepsilon_0 A$ y considerando que el módulo del campo eléctrico entre las placas es $E = Q / \varepsilon_0 A$ resulta

$$F_x = -\frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 A \qquad (5.44)$$

El signo negativo de la fuerza indica que tiene el sentido contrario al de las x, es decir, hay atracción entre las placas.

b) Si se considera al condensador conectado a una batería, de modo que la diferencia de potencial entre sus placas sea constante, la expresión de la variación de la energía está dada por

$$dU = dW + dW_b \qquad (5.45)$$

donde dW es el trabajo mecánico de separar las placas y dW_b es el trabajo efectuado por la batería, el trabajo necesario para mover cada uno de los incrementos de cargas encontra del campo existente es

$$dW_b = -V dQ \qquad (5.46)$$

La energía potencial eléctrica en el condensador está dada por

$$dU = \frac{1}{2}V\,dQ \qquad (5.47)$$

entonces el trabajo será

$$dW = dU - dW_b = -\frac{1}{2}V\,dQ \qquad (5.48)$$

expresando el diferencial de carga en términos de la diferencia de potencial constante y la variación de la capacidad

$$dQ = V\,dC \qquad (5.49)$$

y la variación de la capacidad en función de la variación de la distancia entre las placas

$$dQ = V\,dC = -\frac{V\varepsilon_o A\,dx}{x^2} \qquad (5.50)$$

sustituyendo el diferencial de carga dQ por su expresión resulta

$$dW = -\frac{1}{2}V\,dQ = \frac{V^2\varepsilon_o A\,dx}{2x^2} \qquad (5.51)$$

si se calcula la fuerza

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{V^2\varepsilon_o A}{2x^2} \qquad (5.52)$$

como E = V / x la expresión de la fuerza será

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{\varepsilon_o E^2 A}{2} \qquad (5.53)$$

El signo negativo de la fuerza indica que es en el sentido contrario al de las x , es decir, hay atracción entre las placas.

CUESTIONARIO

1. Si en un condensador la carga se duplica ¿qué sucede con la diferencia de potencial entre sus electrodos?
2. Un condensador tiene sus terminales conectadas a una batería ¿qué sucede con la carga en el condensador si se desconecta de la batería?¿qué pasa si, ahora se conectan entre sí las terminales del condensador?
3. Un condensador plano de área A y separación entre placas d está conectado a una batería. Se lo desconecta de la batería ¿qué pasa con la carga y el potencial si se separan las placas al doble de la separación inicial? ¿se modifica el valor del campo eléctrico entre las placas?
4. Dos condensadores idénticos se pueden conectar en serie o en paralelo, bajo una misma diferencia de potencial, ¿cuál de las asociaciones alcanza mayor carga? ¿Y porqué?
5. La carga neta en un condensador es siempre cero, entonces ¿qué almacena el condensador?
6. ¿Cuántas asociaciones posibles se pueden hacer con tres condensadores de valores diferentes?

7. ¿Por qué es peligroso tocar las terminales de un condensador de alto voltaje aún después de desconectarse de la fuente de voltaje?

PROBLEMAS

1 Calcule la capacidad de una esfera metálica cargada de radio R, que se encuentra aislada. Analice el resultado. Determine la capacidad eléctrica de la Tierra, suponiendo que es una esfera de radio aproximado a 5800Km.

2 Calcule la capacidad de:

a) un condensador plano.
b) un condensador esférico.
c) un condensador cilindrico.

3 Calcule la capacidad de un condensader plano de superficie cuadrada, si la longitud del lado es 1 cm y la separación entre las placas 1mm.

Calcule de nuevo la capacidad si

a) cambia al doble el lado y deja fija la separación.
b) cambia al doble la separación y deja fijo el lado. Haga un análisis de los resultados.

4 Una plancha conductora de espesor d y área A se introduce en el espacio entre las placas de un condensador plano cuya separación es s y área A como se muestra en la figura 1.¿Cuál es el valor de la capacidad del sistema?

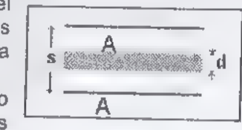


Figura 1

5 Un condensador esférico tiene radio interno R_1 = 1 cm y radio externo R_2 = 2 cm, calcule la capacidad. Repita el cálculo si el radio externo es R_2 = 1.1 cm, y analice el resultado comparándolo con la capacidad de un condensador plano.

6 Considere un condensador plano con una de sus placas móviles, inicialmente se encuentra cargado y aislado. Si se separan las placas al doble de la distancia original, ¿cuál es el nuevo valor del potencial y del campo? Haga el balance energético entre los dos estados.

7 Considere un condensador plano con una de sus placas móviles que se encuentra conectado a una fuente de diferencia de potencial constante, si se acercan las placas a la mitad de la distancia original. Encuentre la expresión de la carga y del campo en la nueva configuración. Haga el balance energético entre los dos estados

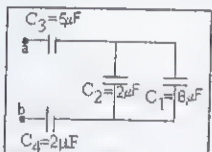
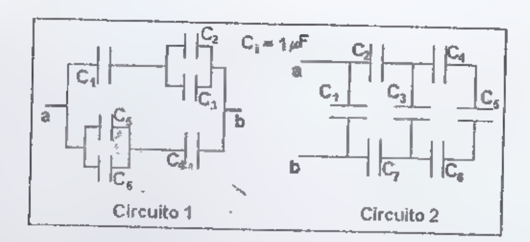


Figura 2

8 Considere el conjunto de condensadores del circuito que se observa en la figura 2.

a) Encuentre la capacidad equivalente entre los puntos a y b.
b) Determine la carga en cada condensador cuando la diferencia de potencia entre a y b es de 20 V

9 Calcular la capacidad de cada uno de los siguientes circuitos si la capacidad de cada condensador es 1 μF. Determine la carga en cada condensador cuando la diferencia de potencia entre a y b es de 10 V



CAPITULO 6

DIELECTRICOS

6.1 INTRODUCCIÓN

En el vacío, el campo eléctrico que se genera cuando se tiene una distribución de cargas se determina por aplicación del principio de superposición, de modo que en un punto P el campo eléctrico (figura1) viene dado por

$$\vec{E}_P = \sum_i \vec{E}_i \qquad (6.1)$$

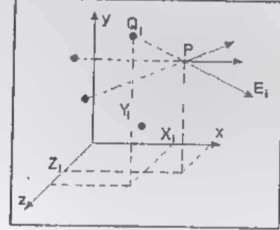


Figura 1

En la práctica esto no es tan sencillo, porque la distribución de cargas se halla en un medio material y las posiciones de las cargas no permanecen fijas, las cargas que se mueven dentro de un entorno (figura 2), entonces el campo producido por cada una debe calcularse mediante un promedio espacio-temporal mediante

$$\vec{E}_i\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{T}\int_T \frac{1}{V_i}\int_{V_i} \vec{E}_i(t, r+\rho)d\rho^3 dt \qquad (6.2)$$

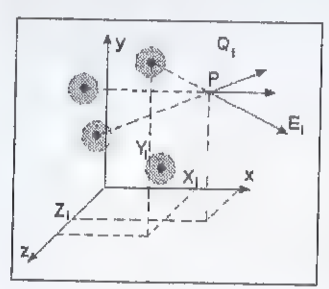


Figura 2

Cuando un material conductor es colocado en una región donde existe un campo eléctrico, los portadores de carga se mueven, produciendo una distribución de cargas en el conductor que asegura que el campo en su interior sea nulo, (figura 3). Al quitar el campo externo se reacomodan las cargas. Este proceso de reacomodación de cargas puede ser interpretado como un proceso de inducción de cargas en el conductor.

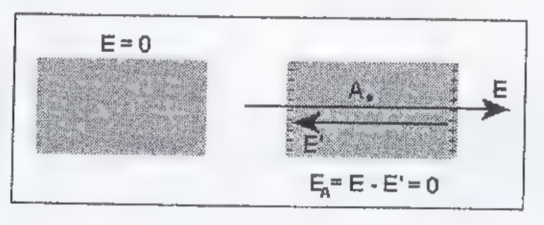


Figura 3

En un material no conductor los portadores de cargas no son libres, los electrones están fuertemente ligados a los átomos. Cuando el material es colocado en un campo eléctrico externo se produce una deformación de la simetría de las moléculas que constituyen el material, debido a los desplazamientos los electrones en cada átomo. El desplazamiento resultante, da la apariencia de cargas inducidas a escala macroscópica que reducen el campo dentro del material no conductor.

El propósito de este capítulo es discutir las cargas inducidas que ocurren en los materiales no conductores, también llamados dieléctricos y formular las leyes que obedece el campo electrostático en presencia de dieléctricos.

6.2 POLARIZACIÓN

El átomo neutro aislado mostrado en la figura 4(a), tiene Z electrones moviéndose alrededor de un núcleo que tiene una carga +Ze. El tamaño del núcleo está exagerado, su diámetro en un átomo real es del orden de un diez milésimo del diámetro atómico. Los electrones están representados como una nube en torno del núcleo de acuerdo a la mecánica cuántica, esta es la forma más útil de pensar en los electrones cuando son discutidas sus propiedades electrostáticas.

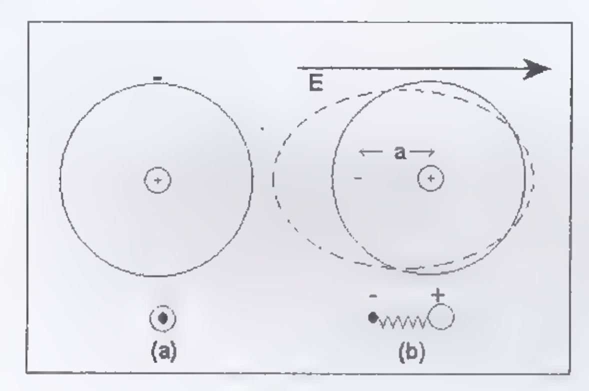


Figura 4

En ausencia de un campo externo, el núcleo de un átomo está en el centro de la nube electrónica porque no experimenta una fuerza electrostática neta. Está en una posición de equilibrio estable, así que, si el núcleo fuera desplazado del centro de la nube de electrones, una fuerza de restitución lo volvería a su lugar, esto surge de la atracción mutua entre electrones y núcleo. Se podría entonces modelar esto considerando dos cuerpos unidos por un resorte figura 4(b)

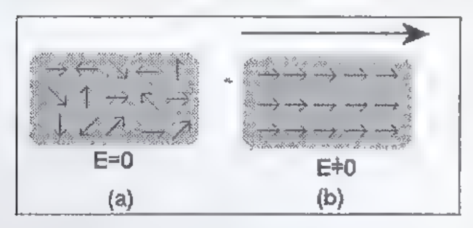


Figura 5

¿Qué sucede si el átomo es colocado en un campo eléctrico externo como el mostrado en la figura 5(a)? El campo empuja el núcleo cargado positivamente hacia la derecha y a los electrones que están cargados negativamente hacia la izquierda. Como resultado, las cargas se mueven hasta que se establece una nueva posición de equilibrio.

La mayor concentración de masa está ubicada en el núcleo y si el centro de masa permanece en reposo los electrones se moverán alrededor del núcleo, esto está esquematizado en la figura 4(b). Otra vez el esquema no está en escala. El campo interno es mucho más fuerte que cualquier campo externo. Consecuentemente la distorsión de la nube electrónica es extremadamente pequeña y no puede verse en la escala del dibujo. El pequeño movimiento que ocurre es en su mayor parte externo al átomo donde el campo atómico es menos fuerte, así que la nube electrónica no tiene más la simetria esférica. El efecto neto, sin embargo, es que el centro de localización de la distribución de los electrones está cambiado y no coincide con el centro del núcleo. En esta nueva posición de equilibrio, se dice que el átomo está polarizado. La figura 4(b) representa una nube electrónica en la cual el centro de masa se ha desplazado una distancia a. El vector

$$\vec{p} = Ze\vec{a} \qquad (6.3)$$

Que apunta en la dirección y sentido del campo eléctrico se llama ***momento dipolar*** del átomo polarizado. Las dimensiones del momento dipolar son

$$[p] = \text{carga}.\,longitud$$

Para el sistema MKSA resulta entonces Coulomb. metro.
Cuando un material no conductor es colocado en un campo eléctrico todos sus átomos se polarizan (figura 5(b)). Por simplicidad, se considera un material dieléctrico homogéneo que contiene N átomos por unidad de volumen. En un campo eléctrico uniforme el centro de masa de la nube electrónica del átomo se mueve la misma distancia alrededor del núcleo, en dirección opuesta al campo eléctrico. Cada átomo, entonces, adquiere un momento dipolar de magnitud $\vec{p} = Z\,e\,\vec{a}$ en la dirección del campo.

Es posible definir el vector **polarización** $\vec{P}$ de un material como el momento dipolar por unidad de volumen, para ello se suman por unidad de volumen todos los momentos dipolares individuales de cada átomo (o molécula).

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{volumen} \qquad (6.4)$$

esto también se puede expresar de otra forma, si todos los dipolos fueran iguales y además, se conoce el número de dipolos por unidad de volumen N, entonces

$$\vec{P} = N\,\vec{p} \qquad (6.5)$$

Las dimensiones del vector polarización son

$$[P] = \frac{\text{carga}\,.longitud}{longitud^3} = \frac{\text{carga}}{longitud^2}$$

$\vec{P}$ es el momento dipolar inducido de cada átomo (o molécula). Obsérvese que se empleó la palabra "inducido", por el hecho de que al quitarse el campo externo se anula la separación entre los centros de localización de cargas y los momentos dipolares se hacen cero. Pero, existen moléculas que poseen naturalmente momento dipolar y que reciben el nombre de moléculas dipolares (ejemplo H_2O). Considerando una muestra de este tipo de material, se puede suponer que inicialmente todos los dipolos están orientados al azar, al someter el material a un campo externo, los dipolos empezarán a orientarse en la dirección del campo, al incrementar la intensidad de éste, más dipolos se orientarán. Es posible, entonces, proponer una relación entre el vector polarización $\vec{P}$ y el campo eléctrico aplicado que sea válida para moléculas dipolares y no dipolares. De lo anterior, surge que existe una relación de proporcionalidad entre $\vec{P}$ y $\vec{E}$

$$\vec{P} \propto \vec{E} \qquad (6.6)$$

que puede expresarse como

$$\vec{P} = \varepsilon_o\,\chi_e\,.\vec{E} \qquad (6.7)$$

A todos los materiales que cumplan con esta relación se los llama lineales. χ_e se llama susceptibilidad eléctrica y relaciona el vector polarización con el campo eléctrico macroscópico que lo produce.

6.3 RELACIÓN ENTRE EL VECTOR POLARIZACIÓN Y LAS CARGAS DE POLARIZACIÓN

El desplazamiento de los electrones da lugar a la aparición de las cargas inducidas en la superficie del dieléctrico. Se va a relacionar el momento dipolar de los átomos individuales con la densidad de carga superficial inducida a la que se llamará carga de polarización. La aparición de una densidad de carga superficial significa que en un volumen macroscópico de la superficie existe una carga neta. Pero la densidad de carga microscópica dentro del dieléctrico polarizado uniformemente permanece nula. Si se imagina una pequeña caja cúbica dentro del dieléctrico antes que sea polarizado como muestra la figura 6(b). La caja es pequeña a escala macroscópica, pero microscópicamente grande para contener muchos átomos. Algunos átomos

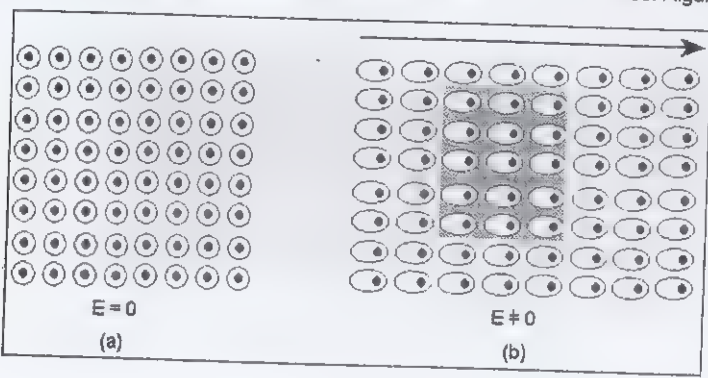


Figura 6

están parcialmente adentro y otros están parcialmente afuera de la caja pero, en promedio, dentro de la caja no hay carga neta. Cuando el campo eléctrico es aplicado de izquierda a derecha, cada átomo es polarizado y las nubes electrónicas de los mismos se desplazan hacia la izquierda. En promedio, se mueven una distancia a, esquemáticamente esto se muestra en la figura 6(b), el recinto permanece eléctricamente neutro. Esto es válido debido a que la polarización es uniforme, en caso contrario, no ocurrirá así.

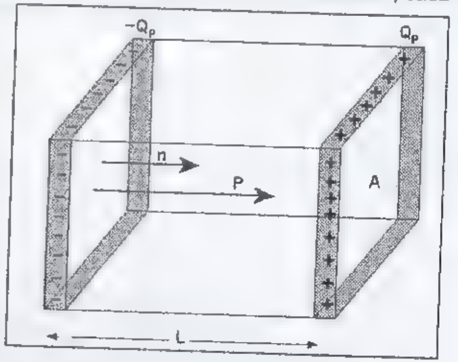


Figura 7

La neutralidad no se conserva en la superficie del dieléctrico, que presenta una densidad de carga como puede observarse en el esquema de la figura 7. En otras palabras, el campo eléctrico induce una densidad superficial de polarización σ_p. Se puede interpretar que el material dieléctrico sometido a un campo eléctrico secomporta como un gran dipolo con carga $Q_p = \pm \sigma_p A$, donde A es el área de la placa, separadas por una distancia L, entonces el momento dipolar será

$$p = \sigma_p \; A \; L \qquad (6.8)$$

por otro lado, el módulo del vector polarización está dado por

$$\left|\vec{P}\right| = \frac{p}{volumen} = \frac{p}{AL} \qquad (6.9)$$

sustituyendo resulta

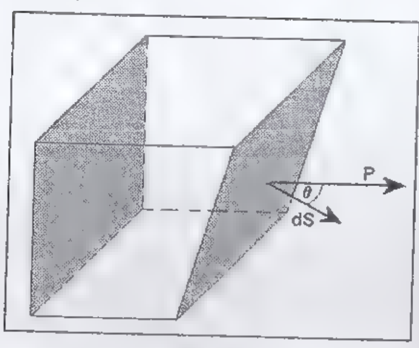


Figura 8

$$P = \frac{\sigma_P AL}{AL} = |\sigma_P| \qquad (6.10)$$

o bien

$$PA = |Q_P| \qquad (6.11)$$

Para el modelo que se trata, la geometría permite establecer que la dirección de P es normal a la superficie y si se considera el vector polarización como semejante al vector eléctrico, en el sentido que también es posible visualizarlo con líneas de fuerzas, que se originan en las cargas de polarización negativas y terminan en las positivas, se puede expresar como

$$P_n A = -Q_P \qquad (6.12)$$

Nótese que P_n. A representa el flujo del vector polarización $\vec{P}$ a través de la superficie de área A.

Para el caso de una geometría distinta, tal como la que muestra la figura 8, y considerando un área elemental resulta

$$P\cos(\theta)\, dS = -dQ_P \qquad (6.13)$$

expresado en forma vectorial

$$\vec{P}\, \vec{dS} = -dQ_P \qquad (6.14)$$

Si se aplica la ley de Gauss, es decir, se integra la relación anterior sobre una superficie cerrada que contenga la carga de polarización - Q_P.
Entonces, ***el flujo del vector polarización a través de una superficie cerrada S es igual a menos la carga de polarización contenida en esa superficie***, matemáticamente

$$\oiint_S \vec{P}\, \vec{dS} = -Q_P \qquad (6.15)$$

6.4 GENERALIZACIÓN DE LA LEY DE GAUSS. VECTOR DESPLAZAMIENTO

Si se llena con un medio dieléctrico el interior de un condensador plano de área A y separación entre las placas d y se carga con ±Q, el dieléctrico se polarizará, estableciéndose las cargas de polarización $\pm Q_P$. y el vector polarización $\vec{P}$ (ver figura 9).

Considerando una superficie cerrada S, que contenga tanto a las cargas de la placa del

condensador como a las cargas de polarización como muestra en la figura la región en gris y empleando la ley de Gauss, se puede expresar

$$\oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q + Q_P}{\varepsilon_o} \qquad (6.16)$$

reemplazando la carga de polarización por (6.15)

$$\oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o} - \frac{1}{\varepsilon_o}\oiint_S \vec{P}\, d\vec{S} \qquad (6.17)$$

haciendo pasaje de términos

$$\oiint_S \varepsilon_o \vec{E}\, d\vec{S} + \oiint_S \vec{P}\, d\vec{S} = Q \qquad (6.18)$$

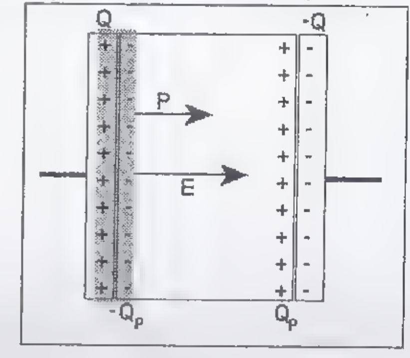


Figura 9

como ambas integrales se realizan sobre la misma superficie podemos reunirlas en una sola

$$\oiint_S \left(\varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}\right) d\vec{S} = Q \qquad (6.19)$$

a la expresión que se halla dentro del paréntesis, se puede renombrar como

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P} \qquad (6.20)$$

por lo tanto la (6.19) se puede rescribir

$$\oiint_S \vec{D}\, d\vec{S} = Q \qquad (6.21)$$

Al que se llama vector desplazamiento $\vec{D}$, se trata de una magnitud vectorial auxiliar, de tipo macroscópico que presenta cierta semejanza con el campo eléctrico $\vec{E}$, por la forma en que está definido, obedece a la ley de Gauss y sus fuentes son las cargas libres a diferencia del vector eléctrico que depende tanto de las cargas libres como de las cargas de polarización. El vector $\vec{D}$ tiene dimensiones de carga por unidad de área.

A diferencia del campo eléctrico $\vec{E}$ (que representa la fuerza que actúa por unidad de carga) o del vector polarización $\vec{P}$ (el momento dipolar por unidad de volumen), el vector desplazamiento $\vec{D}$ no tiene un claro significado físico. La única razón para definirlo es que permite calcular campos en presencia de dieléctricos, sin tener primero conocimiento de las distribuciones de carga de polarización.

Sustituyendo P por la (6.7) en (6.20)

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \varepsilon_o \chi_e . \vec{E} = (\varepsilon_o + \varepsilon_o \chi_e).\vec{E} = \varepsilon_o (1 + \chi_e)\vec{E} \qquad (6.22)$$

si denominamos

$$\varepsilon = \varepsilon_o (1+\chi_e) \qquad (6.23)$$

resulta

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad (6.24)$$

Entonces el comportamiento eléctrico de un material se determina completamente por medio de la permitividad eléctrica ε o por la susceptibilidad χ_e. Sin embargo, es más conveniente trabajar con una cantidad adimensional K definida por

$$K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = (1+\chi_e) \qquad (6.25)$$

K se llama coeficiente dieléctrico o simplemente constante dieléctrica. Las constantes dieléctricas se encuentran en tablas (ver tabla 1).

No se debe perder la perspectiva de que la $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ es un ensayo para describir una propiedad de la materia, la que es muy compleja, por ejemplo: si E es muy intenso D deja de ser proporcional a E y aún para algunos materiales esta proporcionalidad no se cumple para campos débiles.

Material	Cte. dieléctrica K
Tetracloruro de carbono	2.2
Etanol	24
Metanol	33
n-Hexano	1,9
Nitrobenceno	35
Agua pura	80
Vidrio con borosilicato	4.0
Mica	5.4
Polietileno	2.2
Teflón	2.1
Plexiglas	3.4
Parafina sólida	2.2

TABLA1

PROPIEDAD DE LOS MATERIALES DIELECTRICOS (Constante dieléctrica K) Datos del Handbook of Chemistry and Physics, 33ª edición Chemical Rubber Publishing Co., Cleveland, Ohio.(*) Para materiales tales como vidrio, caucho y madera, la composición química puede variar y en consecuencia, el intervalo de constantes dieléctricas. No debe inferirse que el material es no lineal.

6.5 RIGIDEZ DIELÉCTRICA

Si entre las placas de un condensador plano, de separación d que contiene un dieléctrico ε, se aumenta la diferencia de potencial, llega un momento en que salta una chispa: se dice que la diferencia de potencial alcanzó el potencial de descarga V_{desc} , este valor depende del dieléctrico y de la separación entre las placas. Para el caso del aire seco, a presión normal se puede establecer una expresión de tipo empírico, en un condensador plano

$$V_{desc} = 2000 + 3000\, d$$

Donde d es la separación entre las placas medida en milímetros. La expresión anterior es válida para valores de d mayores de 1 hasta algunas decenas de milímetros.

El salto de la chispa, establece dentro del dieléctrico un camino preferencial de paso de cargas, perdiendo sus propiedades de aislante. La resistencia al salto de la chispa a través de un

aislante caracteriza la rigidez dieléctrica V_R de éste. En la tabla 2 se muestran algunos valores de V_R de algunos materiales considerando un espesor de 10 mm. Estos valores se modifican bastante si se cambian la forma los electrodos.

Material	V_R(Kvolt)
Aire	32
Aceite mineral	100 a 200
Vidrios	100 a 300
Caucho	200 a 400
Papel parafinado	400 a 600
Mica	600

TABLA 2

Rigidez dieléctrica. Distancia entre las placas planas 10 mm

6.6 EJEMPLOS

6.6.1 Cable coaxial

Para ilustrar el uso de la ecuación (6.21) se analiza el caso de un cable coaxial como se muestra en la figura 10. La región entre los conductores interno y externo está llena de un material dieléctrico uniforme de permitividad eléctrica ε . Los dos conductores de radio a y b respectivamente, forman un condensador y cuando mantienen una diferencia de potencial entre ellos, aparece una carga $\pm Q_L$ en la superficie de los conductores. Por lo tanto, hay una densidad de carga superficial σ_L sobre el conductor interior de radio a, así que la carga total es

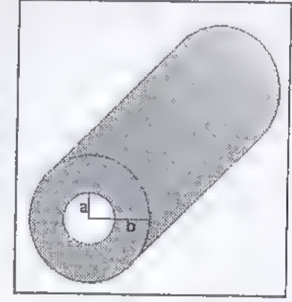


Figura 10

$$Q_L = \sigma_L 2\pi a L \qquad (6.26)$$

El vector desplazamiento responde a una simetría cilíndrica y su magnitud depende solo de la distancia r respecto del eje. Entonces usando la ley de Gauss

$$D 2\pi r L = \sigma_L 2\pi a L \qquad (6.27)$$

despejando D se tiene

$$D = \frac{\sigma_L a}{r} \qquad (6.28)$$

de la relación con el campo eléctrico surge

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\sigma_L a}{\varepsilon r} \qquad (6.29)$$

La diferencia de potencial entre la placa interior y exterior del condensador es

$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E}.\vec{dl} = -\int_a^b \frac{\sigma_L\, a}{\varepsilon\, r}\,dr = \frac{\sigma_L\, a}{\varepsilon}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (6.30)$$

La capacidad del cable coaxial por unidad de longitud es

$$c = \frac{C}{L} = \frac{Q}{\Delta V\, L} = \frac{2\pi\,\varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \qquad (6.31)$$

Para un cable coaxial típico con polietileno como dieléctrico (K = 2.2) de radio interior a = 0.5 mm y radio exterior b = 2.5 mm resulta c = 76 pF / m

La capacidad por unidad de longitud es una propiedad muy importante de un cable coaxial, que se necesita conocer cuando analiza su performance en la transmisión de señales de alta frecuencia. Obsérvese que aún con el dieléctrico la forma del campo eléctrico no cambia, sino que simplemente su magnitud se reduce en el factor ε.

6.6.2 Carga puntual dentro de una esfera dieléctrica

En el centro de una esfera de radio R, dieléctrica de permitividad eléctrica ε, rodeada por el espacio libre, se coloca una carga puntual Q (como muestra la figura 11), se desea determinar las expresiones de los vectores desplazamiento, campo eléctrico y polarización, para $r \le R$ y $r \ge R$.

Entonces empleando la ley de Gauss (6.21) para cualquier radio r, dentro y fuera de la esfera dieléctrica, la carga libre encerrada es Q

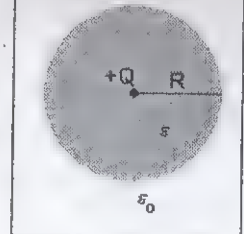


Figura 11

$D\,4\pi\, r^2 = Q$ entonces $D = \dfrac{Q}{4\,\pi\, r^2}$ válida para todo r

El campo eléctrico es

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon\; r^2} && \text{para } r < R\,; \\ E &= \frac{D}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_o\; r^2} && \text{para } r > R\,; \end{aligned}\right\} \qquad (6.32)$$

Con lo que se demuestra que el campo eléctrico en la superficie de separación dieléctrico – vacío presenta una discontinuidad en r = R debido al brusco cambio de permitividades de los medios.

El vector polarización empleando (6.20) y teniendo en cuenta que son vectores paralelos

$$\left.\begin{aligned} P &= D - \varepsilon_o\, E = \frac{Q}{4\,\pi\; r^2} - \frac{\varepsilon_o\, Q}{4\,\pi\,\varepsilon\; r^2} = \left(1 - \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\frac{Q}{4\,\pi\; r^2} && \text{para } r < R \\ P &= 0 && \text{para } r < R \end{aligned}\right\} \qquad (6.33)$$

Con el valor del vector polarización es posible determinar la carga de polarización Q_P, usando la ley de Gauss para $\vec{P}$.

$P 4\pi r^2 = -Q_P$ entonces reemplazando P por (6.33) es posible calcular la carga de polarización en términos de Q, resulta

$$\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\frac{Q}{4\pi r^2}4\pi r^2 = -Q_p \qquad (6.34)$$

entonces

$$Q_p = -\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)Q \qquad (6.35)$$

La densidad de carga de polarización superficial para r = R será

$$\sigma_P = \frac{Q_P}{4\pi R^2} = \left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\frac{Q}{4\pi R^2} \qquad (6.36)$$

6.7 CONDICIONES DE CONTORNO PARA EL VECTOR DESPLAZAMIENTO Y EL VECTOR CAMPO ELÉCTRICO

Si en una región del espacio hay dos medios dieléctricos lineales en contacto, de permitividades ε_1 y ε_2 y en la superficie de separación existe una densidad superficial de carga libre σ_L y se desea conocer el comportamiento de los vectores campo eléctrico $\vec{E}$ y desplazamiento $\vec{D}$ en esa discontinuidad de la región.

6.7.1 Componentes tangenciales

Para ello, se parte el análisis del hecho de que el campo eléctrico es conservativo, matemáticamente se indica como

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = 0 \qquad (6.37)$$

Donde la trayectoria cerrada C es elegida de modo que parte de ella esté en el medio 1 y parte en el medio 2 como muestra la figura 12..

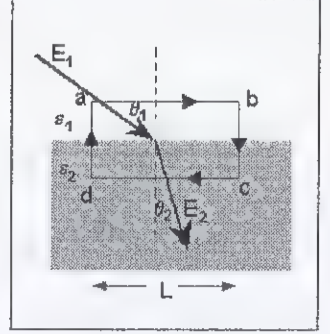


Figura 12

Entonces la integral sobre C puede reescribirse como una suma de integrales por tramos

$$\int_a^b \vec{E}.\vec{dl} + \int_b^c \vec{E}.\vec{dl} + \int_c^d \vec{E}.\vec{dl} \int_d^a \vec{E}.\vec{dl} = 0 \qquad (6.38)$$

La integral entre los límites a y b, considerando que la componente del campo a lo largo de esa trayectoria es E_1 sen (θ_1) resulta

$$\int_a^b E_1 \, sen(\theta_1) dl \qquad (6.39)$$

la integral entre los límites b y c se puede hacer tender a cero, esto se basa en el interés de que los tramos ab y cd pertenezcan a los medios 1 y 2 respectivamente, a ambos lados de la superficie de separación, para que ocurra esto, b debe de tender a c, con este la integral correspondiente tiende a cero.

La integral entre los límites cd, considerando que la componente del campo a lo largo de esa trayectoria es $-E_2$ sen (θ_2) (el signo menos surge debido al sentido del campo que es distinto del de la trayectoria), resulta

$$-\int_c^d E_2 \, sen(\theta_2) dl \qquad (6.40)$$

Para la integral entre los límites da valen los mismos argumentos que para el tramo bc

Por todo lo desarrollado, la integral (6.37) se puede expresar como

$$\int_a^b E_1 \, sen(\theta_1) dl - \int_c^d E_2 \, sen(\theta_2) dl = 0 \qquad (6.41)$$

de donde surge que

$$E_1 \, sen(\theta_1) - E_2 \, sen(\theta_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 \, sen(\theta_1) = E_2 \, sen(\theta_2) \qquad (6.42)$$

que son las componentes tangenciales de los campos con respecto a la superficie de separación

$$E_{1\,tg} = E_{2\,tg} \qquad (6.43)$$

Las componentes tangenciales del campo eléctrico en la superficie de separación son iguales

RESUMEN
En una superficie de separación entre dos medio ε_1 y ε_2 las componentes tangenciales del campo eléctrico de cada medio son iguales, es decir continuas.

6.7.2 Componentes normales

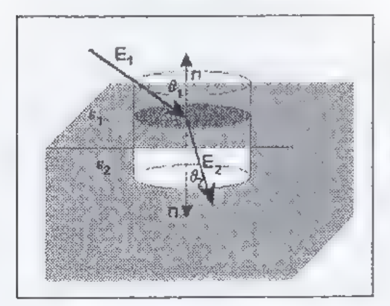


Figura 13

Para estudiar el comportamiento del vector desplazamiento $\vec{D}$ en la superficie de separación, donde existe una densidad de carga libre σ_L, se considera la ley de Gauss, para una superficie cilíndrica elegida de modo que las tapas se encuentren a ambos lados de la superficie de separación, entonces si la sección del cilindro es A, se tiene por (6.21)

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = Q \qquad (6.44)$$

Esta integral hecha sobre superficie cerrada S puede ser expresada como

$$\iint_{S_1} \vec{D}.\vec{dS} + \iint_{S_L} \vec{D}.\vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{D}\,\vec{dS} = Q \qquad (6.45)$$

La integral sobre la S_1 calcula el flujo del vector D_1 a través de la superficie S_1 de modo que resulta

$$\iint_{S_1} \vec{D}.\vec{dS} = -\iint_{S_1} D_1 \cos(\theta_1).dS_1 \qquad (6.46)$$

el signo menos es porque el flujo es entrante en el volumen bajo estudio.

La integral sobre S_L calcula el flujo del vector D a través de la superficie lateral S_L del cilindro, como las tapas del mismo deben estar a ambos lados de la superficie de separación, su altura debe de tender a cero y esto trae como consecuencia que la integral también tienda a cero.

$$\iint_{S_L} \vec{D}.\vec{dS} = 0 \qquad (6.47)$$

La integral sobre S_2 calcula el flujo del vector D_2 a través de la superficie S_2 de modo que resulta

$$\iint_{S_2} \vec{D}.\vec{dS} = \iint_{S_2} D_2 \cos(\theta_2).dS_2 \qquad (6.48)$$

Entonces la integral (6.44) resulta

$$-\iint_{S_1} D_1 \cos(\theta_1).dS_1 + \iint_{S_2} D_2 \cos(\theta_2).dS_2 = Q = \sigma_L\, A \qquad (6.49)$$

Como S_1 y S_2 son las mismas superficies y de área A y además se puede suponer que el campo sea constante en ellas, resulta

$$-D_1 \cos(\theta_1)\, A + D_2 \cos(\theta_2)\, A = \sigma_L\, A \qquad (6.50)$$

ordenando

$$D_2 \cos(\theta_2) - D_1 \cos(\theta_1) = \sigma_L \qquad (6.51)$$

Entonces

$$D_{2\,normal} - D_{1\,normal} = \sigma_L \qquad (6.52)$$

Lo que debe interpretarse como que la componente normal a la superficie del vector desplazamiento $\vec{D}$ en la superficie de separación presenta una discontinuidad si existe en la misma una densidad superficial de carga libre σ_L.

En el caso, en que no exista una carga en la superficie de separación ($\sigma_L = 0$) resulta

$$D_{2\,normal} - D_{1\,normal} = 0 \qquad (6.53)$$

entonces el vector $\vec{D}$ es continuo en la superficie de separación.

RESUMEN

En una superficie de separación entre dos medio ε_1 y ε_2 las componentes normales del campo eléctrico de cada medio son iguales, es decir continuas, si no existe carga en la superficie.

Si ahora, se reemplaza por $D_1 = \varepsilon_1\, E_1$ y $D_2 = \varepsilon_2\, E_2$ en (6.53) resulta

$$\varepsilon_1\, E_1 \cos(\theta_1) = \varepsilon_2\, E_2 \cos(\theta_2) \qquad (6.54)$$

y considerando la (6 42) y dividiendo miembro a miembro estas igualdades surge

$$\frac{tg(\theta_1)}{\varepsilon_1} = \frac{tg(\theta_2)}{\varepsilon_2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_2\, tg(\theta_1) = \varepsilon_1\, tg(\theta_2) \qquad (6.55)$$

Esta ecuación es semejante a la ley de Snell en óptica

6.8 ENERGÍA EN PRESENCIA DE DIELÉCTRICOS

¿Cuál es la energía potencial de las cargas con la presencia de material dieléctrico?

Este es un problema complicado y antes de tratar un sistema general de cargas, se analizará el estudio de la energía almacenada en un condensador con dieléctrico

Considerando la densidad de energía para un condensador plano sin dieléctrico en términos del campo eléctrico, obtenida en el capitulo anterior

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 \qquad (6.56)$$

para este caso se puede considerar que la densidad de energía en el caso del condensador con dieléctrico de permitividad ε, será

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon\ E^2 \qquad (6.57)$$

la cual se puede reescribir como

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon\ E^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon\ E)E = \frac{1}{2}DE \qquad (6.58)$$

Aunque la expresión es válida para el caso de un condensador plano, se puede extender a casos más generales, entonces, expresada en forma más general, resulta

$$\omega = \frac{1}{2}\vec{D}\vec{E} \qquad (6.59)$$

con lo que se verifica que la densidad de energia eléctrica ω en una región donde existe un medio material depende del vector desplazamiento $\vec{D}$ y del campo eléctrico $\vec{E}$.

La energía electrostática total almacenada en un volumen V es

$$W = \int_V \omega\, dvol = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\vec{E}\, dvol \qquad (6.60)$$

Esta expresión de energía es general, para medios dieléctricos lineales.

CUESTIONARIO

1. ¿Cuál es la diferencia entre un conductor y un dieléctrico? ¿Y cuando se sumergen en un campo eléctrico?
2. En el caso de un dieléctrico con dipolos eléctricos permanentes, la presencia de un campo eléctrico ¿qué provoca?
3. En un campo eléctrico no uniforme un cuerpo dieléctrico, sin exceso de carga, experimenta una fuerza neta ¿por qué?
4. ¿Cómo se define el vector polarización? ¿Qué relación tiene con el campo eléctrico aplicado en un dieléctrico?
5. ¿Qué representa la componente normal de P a la superficie del dieléctrico?
6. ¿Qué son las cargas de polarización?
7. ¿Cómo se define el vector desplazamiento eléctrico D? ¿Qué representa su componente normal?
8. ¿Cómo se encuentra la relación $\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}$?. Indique cuáles son los argumentos que usa.
9. Si se tiene en cuenta la relación de la pregunta 5 ¿Cómo puede escribirse D?
10. ¿Cuál sería la permitividad eléctrica del medio? ¿y la relativa? ¿es siempre mayor que 1?
11. Explique porqué un dieléctrico aumenta el valor de la diferencia de potencial de operación de un condensador sin cambiar la geometría del mismo.
12. Describa un condensador electrolítico

PROBLEMAS

1 Una placa plana de dieléctrico ($\varepsilon_r = 5$) es colocada perpendicular a un campo uniforme con una intensidad de E = 1N/C. Si la placa ocupa un volumen de 0.1 m^3 y está uniformemente polarizada. Determine la intensidad del vector polarización en la placa y el momento dipolar total de la placa.
2 Una placa delgada de material ($\varepsilon_r = 4$) es colocada perpendicular a un campo eléctrico uniforme. Si la densidad superficial de carga de polarización es $\sigma_P = 0.5$ C/m^2, determine a) La intensidad del vector polarización b) La intensidad del vector desplazamiento D en la placa y fuera de ella c) La intensidad del campo eléctrico E en la placa y fuera de ella.
3 Un condensador de placas paralelas dispuesto horizontalmente se llena la mitad derecha con un dieléctrico de permitividad ε mientras que la mitad izquierda se llena con aire (ε_o). La separación entre las placas es d = 10 mm y está a una diferencia de potencial de 100 voltios. Hallar E, D y P en ambas mitades, suponer que $\varepsilon = 3\,\varepsilon_o$.
4 Un condensador de placas paralelas dispuesto horizontalmente tiene una separación entre las placas igual a 10 mm y está a una diferencia de potencial de 100 voltios. En su interior hay un dieléctrico de permitividad ε y con un espesor igual a 5 mm apoyado en la placa inferior. E espacio de arriba está lleno de aire. a) Determine el valor de E, D y P en el espacio lleno de aire y en el medio dieléctrico. b) Hallar la diferencia de potencial como una función de la distancia entre las placas. Suponer que $\varepsilon = 3\,\varepsilon_o$.
5 ¿Cuál es la intensidad de E, D y P a una distancia r = 100 mm de una carga puntual de Q = 1 μC en un medio infinito de a) aire. b) un dieléctrico con que $\varepsilon_r = 9$?
6 Una carga puntual (q =1 μC) está en el centro de una esfera dieléctrica ($\varepsilon_r = 9$) de radio R = 1cm, la que a su vez se halla rodeada por otro medio dieléctrico ($\varepsilon_r = 4$). Determine la intensidad de E, D y P para r < R y r > R.

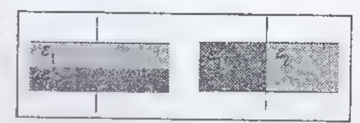


Figura 1P

7 En un condensador de placas paralelas se colocan dos medios dieléctricos (ε_1 y ε_2) como muestra la figura 1P. Determine el valor de la capacidad en cada caso.

8 Si se tiene un mol de tetracloruro de carbono – CCl_4 - (ε_r = 2.24 a 20 °C, δ = 1.6 g/cm^3) en un campo eléctrico de 10^7 V/m. a) Determine el momento dipolar eléctrico de una molécula simple. b) Calcule la distancia media entre los centros de cargas.

9 La molécula de agua tiene un momento dipolar permanente p = $6.2.10^{-30}$ C.m. a) Determine la distancia media entre los centros de cargas b) Si se tiene 10^{-3}mol de agua con todos sus dipolos orientados en la dirección del campo eléctrico de intensidad E= 3 10^5 N/C. ¿Cuál es el trabajo necesario para rotar los dipolos 90°?

10 Un cable coaxial tiene una capacidad de75pF/m, su conductor externo de diámetro interno 0.9 cm y está lleno de polietileno (ε_r = 2.2) ¿Cuál es el diámetro del conductor interno?

11 En un condensador plano de placas cuadradas de lado L y separación d, se introduce una placa de dieléctrico de constante ε una distancia x dentro del mismo. Como muestra la figura 2P.

a) Encuentre la capacidad equivalente.
b) Calcule la energía almacenada en el condensador si la diferencia de potencial es V.
c) Encuentre la magnitud y sentido de la fuerza ejercida sobre el dieléctrico, suponiendo que la diferencia de potencia se mantuvo constante y no se tiene en cuenta los efectos de los extremos.

Figura 2P

Sampallo, Guillermo
Problemas resueltos de electricidad y magnetismo. - 1a ed. -
Corrientes : el autor, 2008.
284 p. ; 21x15 cm.

ISBN 978-987-05-5258-1

1. Electricidad. I. Título
CDD 621.3



ISBN Nº 978-987-05-5258-1
Editado por el autor.

Queda hecho el depósito que previene la Ley 11723
Impreso en **Moglia S.R.L.**, La Rioja 755
3400 Corrientes, Argentina
moglia@gigared.com
www.mogliaediciones.com
Octubre de 2008

PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Guillermo Sampallo

Profesor titular Física II Facultad Regional Resistencia – UTN
Ex Profesor titular Física Teórica I (Electromagnetismo) FACENA - UNNE

2008

TABLA DE CONTENIDO

CAPITULO I: SUGERENCIAS PARA RESOLVER LOS PROBLEMAS

Guillermo Sampallo – Susana Julia Meza

INTRODUCCIÓN

El lema es "**Solo haciendo se aprende**".

La resolución de problemas constituye una de las actividades más frecuentes en las clases de física, a tal punto que hoy en día ya no se pone en discusión el papel que juega en el aprendizaje de los conceptos y leyes fundamentales.

Una cuestión que se ve a menudo en las clases, es que hay alumnos que conociendo la teoría y esforzándose en aplicarla no logran desarrollar adecuadamente la capacidad para encarar y resolver problemas, es decir tienen dificultad en cómo aplicar los contenidos teóricos estudiados a situaciones problemáticas concretas, creo que es, una falta de entrenamiento para desarrollar esa capacidad.

Este libro a través de los 250 problemas resueltos y preguntas adicionales (sin respuesta) tiene como objetivo convertirse en un estímulo y guía para el estudiante en el aprendizaje y entrenamiento en la resolución de problemas.

Esta capacidad de encarar y resolver problemas puede edificarse con la práctica, es decir, resolver la mayor cantidad de problemas, que no significa resolver muchos problemas similares, sino, distintos. Además los procesos que conducen a las soluciones no son únicos, ni sistemáticos, es posible resolver un problema y poder hacerlo con aquellos que son similares a aquel, pero ante una nueva problemática en el mismo tema, el proceso para alcanzar la solución implica que el aprendizaje previo debe ser reorientado, que se deben introducir nuevas ideas.

Es conveniente aclarar que el método de resolución de problemas es un tema de investigación de permanente estudio, y queda claro, que no existe una única receta para resolver los problemas.

Por lo tanto, en este capítulo se plantean un conjunto de sugerencias sobre cuáles estrategias pueden usarse para desarrollar la capacidad para resolver problemas, esto es, más bien, un intento para mostrar una posible organización ante una situación problemática, que posibilitará un mejor posicionamiento para establecer un proceso que conduzca a una solución de la misma.

La resolución de problemas

Ante una situación problemática pueden surgir preguntas como, ¿Por dónde comienzo?, ¿Qué hago?.

El arribar a una solución significa haber transitado acciones que pueden ser encaradas de distintas maneras y que se ven traducidas en los distintos métodos de resolución de problemas que ponen en juego aspectos conceptuales y procedimentales.

En la secuencia de acciones que se presenta a continuación intenta mostrar una manera de encarar la solución de un problema. Estas acciones pueden ser encaradas de manera flexible.

Secuencia propuesta para la resolución de un problema

La lectura del enunciado del problema

En primer término, es importante adoptar una actitud positiva, de confianza y esforzarse a ser ordenado.

Básicamente se busca asegurar la interpretación del texto, conocer e interpretar las palabras desconocidas en el contexto del problema y si es necesario, se debe recurrir a los diccionarios. Para favorecer el análisis considerar las oraciones por separado.

De la lectura debe surgir:

a) La identificación especifica de la situación problemática, ¿qué pregunta el problema?. ¿qué se quiere conocer?
b) La identificación de los parámetros, variables o bien descriptores que pueden presentarse en forma explícita o implícita, numérica o verbal, en exceso, que pueden ser relevantes o no.
c) La identificación del fenómeno y/o de los conceptos que permiten encuadrar la situación problemática en una temática y su teoría asociada.

d) La identificación de las restricciones, es decir, condiciones impuestas en el enunciado que limitan el modelo.
e) Los datos, es decir los valores que pueden tomar los parámetros o descriptores
f) La identificación del contexto teórico (leyes o principios físicos) en donde está enmarcado el problema.

A partir de la lectura del enunciado del problema se podría construir una representación mental del problema, que debería ser explicitado

La representación o esquema del problema

La representación o esquema del problema consiste en organizar una presentación visual de la información contenida en el enunciado del problema que intenta facilitar su análisis e interpretación porque identifica específicamente en la situación el fenómeno físico, las variables, los conceptos asociados, los datos las incógnitas, el entorno, las restricciones, etc. La identificación puede hacerse mediante una nomenclatura adecuada, una representación gráfica (segmentos o vectores según sea el caso), introduciendo un sistema de coordenado, etc.

Ejemplo 1: *La carga eléctrica Q_1 separada una distancia r de la carga Q_2, ejerce una fuerza de repulsión sobre esta. Calcule el módulo de la fuerza.*

Para este caso, la representación puede ser un esquema, donde las "cargas eléctricas" se consideran cuerpos puntuales cargados y se los representa gráficamente mediante puntos, identificados como Q_1 y Q_2 y separados una distancia r. Sobre la carga Q_2 se dibuja un vector representativo de la fuerza de repulsión identificada por F_{21}. Como se muestra en la figura. Como restricción en la representación se impuso que son cuerpos cargados puntuales y el análisis se hace en un plano.

Ejemplo 2: *La carga eléctrica Q_1 ubicada en (x_1, y_1) ejerce una fuerza de repulsión sobre la carga Q_2 ubicada en (x_2, y_2). Calcule la fuerza.*

En este caso, además de lo anterior, en la representación se incorpora un sistema de coordenado adecuado, en donde claramente obliga a posicionar los cuerpos cargados respetando la referencia.

Entonces una representación del problema puede ser una figura que describe la situación y/o el fenómeno como si fuera un escenario, una representación con símbolos tales como letras, vectores y diagramas o una representación más formal en términos de ecuaciones.

En definitiva, se sugiere en lo posible que el interesado en resolver el problema adopte algún criterio de representación semejante a los anteriores o alguno propio, con tal que describa lo más acertadamente la información contenida en el enunciado.

Una representación mal definida o datos excluidos conducen a una mala interpretación. Por ello, no siempre la primera representación realizada resulta la más apropiada o correcta, a veces será necesario que exista una evolución de una representación inicial a otra más elaborada y compatible con todos los datos relevantes del problema.

Construida correctamente la representación de problema, permitirá la vinculación con los principios o leyes físicas que constituyen la base para resolverlo.

Vinculación con el marco teórico

Ya sea sugerida por la representación o planteada por ella misma se podrá seleccionar una relación básica o deducir una ecuación que se puede utilizar para determinar la incógnita delineando así una estrategia de solución.

A partir de la identificación de las variables en la representación y en el marco de la teoría se selecciona una ley que servirá para responder al problema planteado (en los ejemplos 1 y 2 las variables son cargas que están identificadas con Q_1, Q_2, la fuerza con F_{21}, la distancia con r, y la ley de Coulomb, que puede expresada, según sea el caso, en módulo o vectorialmente).

También esas variables presentadas en la representación pueden relacionarse, empleando principios o leyes físicas para deducir una ecuación que permita hallar la incógnita en forma simbólica.

Cálculo numérico

La sustitución de los valores dados con las unidades apropiadas en la expresión simbólica o dentro de la ecuación y su cálculo permite obtener el valor de la incógnita

En el cálculo algunas cosas a tener en cuenta:

a) En ingeniería, es siempre conveniente trabajar con los *valores numéricos* y cuidar su notación particularmente en aquellos con notación científica, cuando se emplea una calculadora asegurar que este operable en el modo correcto.

b) Las *cifras significativas* no deben incluir más de las incluidas en los datos. La precisión del valor numérico en la solución depende de la precisión de los datos involucrados y de la forma con que se llevaron a cabo.

c) La *naturaleza* de las variables si son escalares o vectoriales, y por lo tanto, las operaciones entre ellas

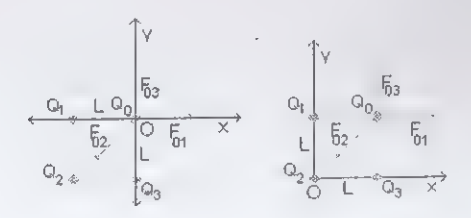
d) Verificar que los datos estén expresados en un único sistema de unidades antes de hacer las operaciones.

A veces el problema hace necesario una representación gráfica (no confundir con la representación o esquema del problema). Los cuidados a tener en cuenta son:

a) Definir claramente el sistema de referencia, por ejemplo, si es un sistema cartesiano ortogonal *x*, *y*, identificar el significado de cada eje y la unidad que se usa.

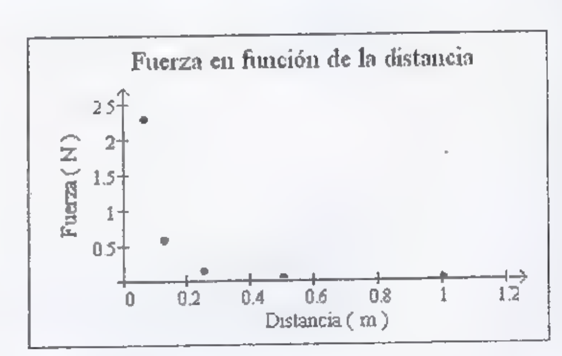
b) El origen y la orientación que se elija para el sistema de referencia deben ser cómodos para el operador y fácil de interpretar para el lector.

c) Si los datos del problema surgen de una evaluación discreta (punto a punto), la gráfica debe ser con puntos, mientras que si se trata de una evaluación continua deberá con líneas llenas

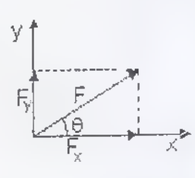


En un diagrama vectorial, la selección del origen del sistema de referencia, puede ser elegida por el operador

$r_i\,[m]$	$F_i\,[N]$
1	0.009
0.5	0.036
0.25	0.144
0.125	0.575
0.063	2.302



d) En un diagrama vectorial indicar claramente las componentes empleando una nomenclatura adecuada.



e) A veces resulta útil que en la misma figura representativa del escenario se superponga un diagrama vectorial.

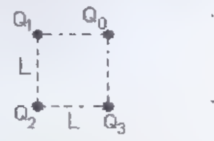


Figura representando una distribución de cargas puntuales

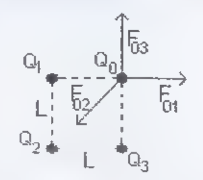
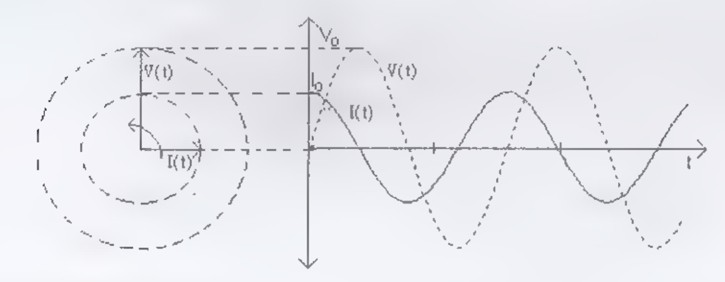


Diagrama de fuerzas superpuesto a la figura

f) Si a un diagrama vectorial se da movilidad, un gráfico asociado con él podría hacerse simultáneamente para mejorar la interpretación. En la figura se muestra a la izquierda dos vectores que rotan en sentido antihorario, a la derecha como varían la proyección de sus amplitudes sobre la dirección vertical.



Comprobación de la solución

Alcanzada una solución se debe verificar si ella es correcta, para ello pueden emplearse los siguientes criterios:

La unidad de la magnitud obtenida en la solución debe coincidir con la correspondiente a la magnitud incógnita.

a) El resultado numérico obtenido debe ser razonable y adecuado con los valores numéricos usados en el problema
b) El signo del resultado debe ser interpretado.
c) La naturaleza del resultado (escalar, vectorial) debe ser compatible con las operaciones involucradas en la expresión simbólica y con la de la magnitud incógnita.

En caso de no verificarse algunos de los aspectos considerados anteriormente, será necesario realizar una revisión, algunas veces basta revisar el cálculo, las unidades, pero en otras, la revisión debe alcanzar a la representación del problema y al procedimiento empleado, es decir debe hacerse un control integral.

Dar respuesta al problema

Dar respuesta al problema significa contestar concretamente la pregunta del enunciado del problema.
A veces, la solución del problema no es simplemente un valor numérico obtenido al realizar correctamente un cálculo numérico o la confección de un gráfico, por que esto no necesariamente significa responder a la pregunta del problema, a veces, para hacerlo se requiere dar una interpretación explicita de los resultados y /o gráficos.

En las acciones anteriores se apunta a:

a) Identificar el problema
b) Seleccionar y ejecutar una estrategia para alcanzar la solución.
c) Comprobar la solución.
d) En caso de que no sea válida, ser flexible a producir una reformulación

Otros aspectos a considerar

Una manera de entrenarse en la resolución de problemas podría ser ante una situación problemática que fue resulta previamente introducir modificaciones en los datos numéricos y/o en las condiciones físicas y proceder a resolver. En este caso, es posible tener en cuenta todas las acciones realizadas en la situación problemática original y analizar (y esto es lo que sirve) la forma de incorporar en el proceso de solución ese/esos cambio/s.

El orden y la claridad en el desarrollo en la resolución de un problema son fundamentales. Debe tenerse presente que siempre es posible que otra persona desee leer y principalmente comprender el desarrollo presentado, y por otro lado la tarea del autor en el proceso de comprobación se verá facilitada.

En muchos problemas resueltos planteados en este libro se explicita la secuencia propuesta en este capitulo, en otros solo se presenta la solución numérica.

Ejemplo 3: *En cuerpo puntual de masa $m = 10^{-6}$ kg y carga eléctrica $Q = 10^{-9}$ C separado una distancia r de otro igual. ¿Cuál debe ser la distancia r para que la fuerza de repulsión eléctrica esté en equilibrio con el peso? Suponer $g = 9.8\ m/s^2$.*

De la lectura

¿Qué se busca? La distancia *r* entre los cuerpos puntuales

Magnitudes físicas involucradas: masa, carga eléctrica, distancia entre los cuerpos puntuales cargados, fuerza eléctrica de repulsión y peso

Fenómeno: interacción eléctrica, debido que los cuerpos tienen carga de igual signo existe una fuerza de repulsión sobre uno de los cuerpos, el enunciado exige que esta fuerza esté en equilibrio con el peso del cuerpo.

Restricciones: cuerpos puntuales - la aceleración de la gravedad

Datos: $m = 10^{-6}$ kg $Q_1 = 10^{-9}$ C $Q_2 = 10^{-9}$ C $g = 9.8\ m/s^2$

Marco teórico: Electrostática – fuerzas entre cargas puntuales- ley de Coulomb.

La Representación

En la representación del problema se muestra dos puntos distanciados representativos de los "cuerpos puntuales cargados" identificados con una nomenclatura adecuada, es decir, sus cargas diferenciadas con subíndice, la fuerza de repulsión F_{21} también con subíndices (la fuerza sobre Q_2 debido a la carga Q_1), en el peso no se emplean subíndices. El diagrama de vectores se muestra en forma vertical para visualizar mejor el peso.

F_{21} | Q_2 m | P | r | Q_1

Vinculo con el marco teórico

Dos conceptos involucrados en la pregunta del problema

a) La ley de Coulomb $\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\vec{r}_o$

b) El peso $\vec{P} = m\,\vec{g}$

Cuando se plantea el equilibrio entre estas fuerzas para responder la pregunta del problema, se construye una ecuación: $\vec{F}_{21} - \vec{P} = 0$ de donde surge $\vec{F}_{21} = \vec{P}$ que es equivalente a trabajar con sus módulos y cuando se reemplaza por sus expresiones surge

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = m\,g$$

Despejando la incógnita $r = \sqrt{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q_1 Q_2}{m g}}$

La expresión obtenida es una solución de tipo simbólica.

Cálculo numérico

Considerando que todas las magnitudes físicas están expresadas en el SI y que la constante se expresa como

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9\cdot 10^9 \frac{N\ m^2}{C^2}$$

resulta
$$r = \sqrt{\frac{9\cdot 10^9 \dfrac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\left(10^{-9}\right)^2 C^2}{10^{-6}kg\cdot 9.8\,m/s^2}} = 0.03\,m$$

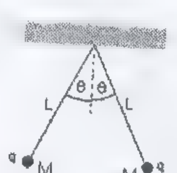
Comprobación de la solución

En el resultado se verifica que la unidad y la naturaleza se corresponden con las de la magnitud incógnita y que el valor numérico es razonable.

Dar respuesta al problema

La distancia entre los cuerpos cargados para que se cumpla $\vec{F}_{21} - \vec{P} = 0$ debe ser r = 0 03 m.

Ejemplo 4: *Dos esferas cargadas iguales de dimensiones pequeñas y masa = 1 g, se hallan colgadas de un soporte mediante hilos de seda de 30 cm de longitud y penden de un punto en común. Cada hilo forma un ángulo de 5º con la vertical. Calcúlese el valor de las cargas y la tensión en los hilos.*



¿Qué se busca? El valor de las cargas y la tensión en los hilos

Magnitudes físicas involucradas: masa, carga eléctrica, longitud del hilo, ángulo que el hilo forma respecto de la vertical, distancia entre los cuerpos puntuales cargados, fuerza eléctrica de repulsión y peso

Fenómeno: interacción eléctrica, debido que los cuerpos tienen carga de igual signo existe una fuerza de repulsión sobre uno de los cuerpos, el enunciado exige las cargas estén en equilibrio para un ángulo definido del hilo forma respecto a la vertical.

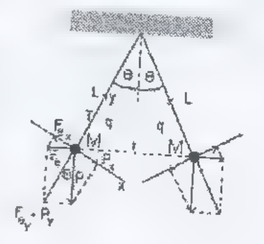
Restricciones: cuerpos puntuales - la aceleración de la gravedad – equilibrio estable.

Datos: $L = 0.3\,m \quad \theta = 5\cdot\dfrac{\pi}{180}rad \quad M = 0.001\cdot kg \quad g = 9.8\,m/s \quad \varepsilon_o = 8.85\cdot 10^{-12}\dfrac{C^2}{N\cdot m^2}$

Marco teórico: Electrostática - ley de Coulomb - peso.

La Representación

En la representación del problema se muestra dos puntos distanciados representativos de las "esferas cargadas iguales" Sobre las cargas se dibuja el diagrama de fuerzas P, F_e y T y un sistema de referencia x, y con el eje y coincidiendo con el hilo. Se muestran las proyecciones de P y de la fuerza eléctrica sobre los ejes.



Vinculación teórica

Sobre la carga q actúan dos fuerzas:

- La fuerza eléctrica es de repulsión por ser las cargas del mismo signo y está orientada horizontalmente.
- El peso de la esfera

La condición de equilibrio se debe cumplir en dos direcciones coincidiendo con el sistema de referencia elegido:

- A lo largo de la línea de trazos perpendicular al hilo de soporte y está dada por las proyecciones de la fuerza eléctrica y el peso.
- A lo largo del hilo entre la tensión del hilo y la resultante de estas fuerzas en esa orientación.

Para el eje x $\quad -F_{ex}+P_x=0 \quad \Rightarrow F_e\cdot\cos(\theta)=P\cdot sen(\theta)$

$$\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{q^2\cdot\cos(\theta)}{\left(2\cdot L\cdot sen(\theta)\right)^2}=M\cdot g\cdot sen(\theta)$$

Esta última condición usaremos para obtener el valor de la carga.

$$q=\sqrt{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot\left(2\cdot L\cdot sen(\theta)\right)^2\cdot M\cdot g\cdot tg(\theta)}=\pm 1.615\cdot 10^{-8}C$$

Para el eje y $\quad T-F_{ey}-P_y=0 \quad \Rightarrow T=F_e\cdot sen(\theta)+P\cdot\cos(\theta)$

$$T=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{q^2\cdot sen(\theta)}{\left(2\cdot L\cdot sen(\theta)\right)^2}+M\cdot g\cdot\cos(\theta)=9.289\cdot 10^{-4}N$$

Respuesta: El valor de la carga es q = $\pm 1.615\cdot 10^{-8}$ C, los signos que surgen de la raíz cuadrada indican que son cargas de igual signo, ambas positivas o ambas negativas, para que se establezca la repulsión.
La tensión en el hilo es $9.289\cdot 10^{-4}$ N

Algunas reglas para tener en cuenta en la nomenclatura y unidades

General	Sólo se usan unidades del SI y aquellas unidades reconocidas para el uso con el SI para expresar los valores de cantidades. Los valores equivalentes en otras unidades se expresan los valores entre paréntesis seguidos de las unidades aceptadas cuando juzga necesaria la inclusión.
Abreviaturas I	Se evitan abreviaciones como el sec., c.c. o mps y sólo símbolos de unidades normales, los símbolos del prefijos, nombre de la unidad y nombres prefijos son usados Correcto: s o segundo; cm^3 o centímetro cúbico, m/s o metro por segundo Incorrecto: seg; cc; mps
Plural	Los símbolos de las unidades no se modifican en plural. Correcto : l = 75 cm Incorrecto : l = 75 cms
Puntuación	Los símbolos de la unidad no son seguidos por un punto salvo al final de una frase. Correcto: La longitud de la barra es 75 cm. La barra tiene 75 cm de longitud. Incorrecto: La barra tiene 75 cm. de longitud

Multiplicación y división	Un espacio o el punto medio-alto se usa para indicar la multiplicación entre unidades. Un " / " (es decir, slash), línea horizontal o continua, o un exponente negativo se usan para indicar la división entre unidades. Los " / " no deben repetirse en la misma línea a menos que se usen los paréntesis. Correcto: La velocidad del sonido es 344 $m \cdot s^{-1}$ (metros por segundo) m/s, $m \cdot s^{-2}$, $m \cdot kg/(s^{-3} \cdot A)$, $m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$ Incorrecto: La velocidad del sonido es alrededor de 344 ms^{-1} $m \div s$, m/s/s, $m \cdot kg/s^{-3}$ /A
Modificación de unidades	Los símbolos de las unidades (o nombres) no son modificados por la inclusión de subíndices u otra información Por ejemplo, las siguientes formas son usadas Correcto: Vmax = 1000 V Incorrecto: V = 1000 Vmax
Porcentajes	El símbolo % se usa para representar simplemente el número 0.01. Correcto: l1 = l_2(1 + 0.2 %), o D = 0.2 %, donde D está definida por la relación $D = (l1 - l_2)/l_2$. Incorrecto: La longitud l1 excede la longitud l2 en 0.2 %
Información y unidades	La información no debe ser mezclada con el símbolo de las unidades o nombre Correcto: El contenido de agua es 20 mL/kg Incorrecto: 20 ml H_2O/ kg 20 ml de agua/ kg
Notación matemática	Debe ser claro que el símbolo de la unidad pertenece a un valor numérico y qué operación matemática se aplica al valor de una cantidad Correcto: 35 cm x 48 cm 1 MHz a 10 MHz ó (1 a 10) MHz 20 °C a 30 °C ó (20 a 30) °C 123 g ± 2 g ó (123 ± 2) g 70 % ± 5 % ó (70 ± 5) % 240 x (1 ± 10 %) V Incorrecto: 35 x 48 cm 1 MHz-10 MHz ó 1 a 10 MHz 20 °C-30 °C ó 20 a 30 °C 123 ± 2 g 70 ± 5 % 240 V ± 10 % (no se puede sumar 240 V con 10 %)
Símbolos y nombres de las unidades	El símbolo de la unidad y el nombre de la unidad no deben mezclarse y las operaciones matemáticas no se deben aplicar a los nombres de la unidad Correcto: kg/m^3 , $kg \cdot m^3$, ó kilogramo por metro cúbico Incorrecto: kilogramo/m^3, kg/metro cúbico, kilogramo/metro cúbico, kg por m^3, ó kilogramo por $metro^3$
Números y símbolos	Los valores de cantidades son expresados en unidades aceptables empleando números arábigos y símbolos para las unidades Correcto: m = 5 kg la corriente fue 15 A Incorrecto: m = cinco kilogramos m = cinco kg la corriente fue 15 amperes
Espaciado de las unidades	Hay un espacio entre el valor numérico y símbolo de la unidad, incluso cuando el valor se usa en un sentido adjetival, excepto en el caso de unidades con exponente como el caso del ángulo plano. Correcto: una esfera de 25 kg un ángulo de 2° 3' 4" Incorrecto: una esfera de 25-kg un ángulo de 2 ° 3 ' 4 "

Espaciado Digital	Los dígitos de los valores numéricos que tienen más de cuatro dígito en el lado de la marca decimal están separados en los grupos de tres que usan un espacio delgado, el espacio fijado se tiene en cuenta tanto a la izquierda como a la derecha del marcador decimal. Las comas no se usa separan los dígitos en los grupos de tres. Correcto: 15 739.012 53 Incorrecto: 15739 01253 15,739.012 53
Símbolo estándar	Se usan símbolos de cantidades estandarizadas. Análogamente, se usan signos y símbolos matemáticos estandarizados. Más específicamente, la base de "log" en las ecuaciones es especificada cuando se requiere escribir loga *x* (para indicar el log de x en base a), ln x (indica el log2 x), ln x (indicando $\log_e x$). o lg x (indicando log10 x). Correcto: tan *x* R para la resiste A_r para la masa atómica relativa Incorrecto: tg *x* para la tangente *x* palabras, siglas, o los grupos ad hoc de letras
Peso vs. masa	Cuando la palabra "peso" es usada, el significado intencional está claro (En la ciencia y tecnología, el peso es una fuerza entonces, la unidad en el SI es newton; en el comercio y todos los días usa, el peso normalmente es un sinónimo de masa para que la unidad de SI es el kilogramo.)
Cantidad de un cociente	La cantidad de un cociente es explícitamente escrita Correcto: masa dividido por volumen Incorrecto: masa por unidad de volumen
Objeto y cantidad	Un objeto y cualquier cantidad que describen el objeto deben ser distinguidas. (Notar la diferencia entre " la superficie" y " área", " el cuerpo" y "masa", " la resistencia" y "resistencia"," la bobina" e " inductancia".) Correcto: Un cuerpo de masa 5 g Incorrecto: Una masa de 5 g
Términos Obsoletos	Los términos normal, molaridad y molal y sus símbolos N, M y m no son usados. Correcto: Cantidad de sustancia: concentración de B (más comúnmente llamado concentración de B), y su símbolo cB y en el SI la unidad es mol/m^3 (o está referida a una unidad aceptable del SI) molalidad de un soluto B, y su símbolo bB ó mB y en el SI la nidad es mol/kg (o está referida a una unidad aceptable del SI) Incorrecto: normal y el símbolo N, molaridad y el símbolo es M. Molal y el símbolo es m

CAPITULO II: ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS

LEY DE COULOMB

PROBLEMA 1

Calcule el módulo de la fuerza electrostática que ejerce un cuerpo cargado puntual cargado con $Q = 10^{-6}$C sobre otro igual, cuando están distanciados a) $r_1 = 1$ m, b) $r_2 = 0{,}5$m, c) $r_3 = 0{,}25$ m, d) $r_4 = 0{,}125$ m. Haga una representación gráfica de la fuerza en función de la distancia entre los cuerpos.

PROBLEMA 2

Calcule el módulo de la fuerza electrostática que ejerce que ejerce un cuerpo cargado puntual cargado con carga $Q_o = 10^{-6}$ C sobre otro que está a a una distancia r = 0,125m, siendo su carga: a) $Q_1 = Q_o/2$, b) $Q_2 = Q_o$, c) $Q_3 = 3Q_o/2$, d) $Q_4 = 2Q_o$ Haga una representación gráfica de la fuerza en función de la carga.

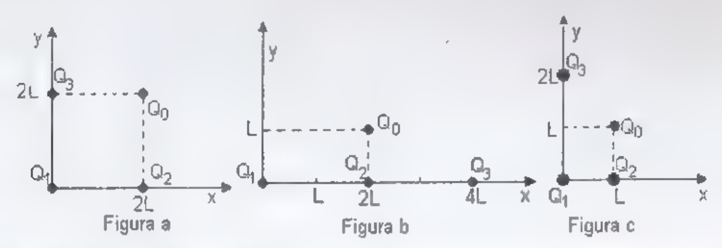
PROBLEMA 3

Encuentre la fuerza (el módulo y la orientación) sobre el cuerpo puntual con carga q_o ubicado en las coordenadas (x_o, y_o) debido al cuerpo puntual con carga Q colocado en (x, y)

PROBLEMA 4

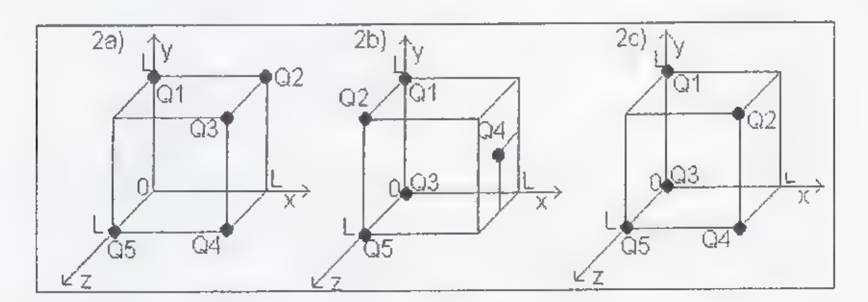
Calcule la fuerza electrostática sobre el cuerpo puntual con carga Q_0 debido a la presencia de tres cuerpos puntuales con cargas Q_1, Q_2 y Q_3 respectivamente como muestran las figuras 1a), 1b), 1c).

Datos: Q_0= 1C, Q_1 = -2 C, Q_2 = 2 C, Q_3 = 1 C L = 1m.



PROBLEMA 5

Calcule la fuerza electrostática sobre la carga Q1, según se indica en las figura 2 a), b) y c). Datos: Q1 = Q2 = Q3 = 1C, Q4 = Q5 = 2 C, L= 0.2 m.



PROBLEMA 6

Un átomo de hidrógeno está constituido por un núcleo (un protón) y un electrón girando en forma estable en una órbita. Se desea conocer la velocidad del electrón si el radio de la órbita es $0{,}528.10^{-8}$ cm. DATOS. m_e= $9{,}11.10^{-31}$ Kg. y $q_p = -q_e = 1{,}610^{-19}$ C.

PROBLEMA 7

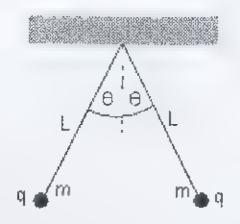
Una cierta carga Q se divide en dos partes +q y Q - q. ¿Cuál es la relación de Q a q si las dos partes separadas una cierta distancia deben producir una máxima repulsión coulombiana entre si?

PROBLEMA 8

Tres cargas puntuales iguales de $Q = 1.10^{-4}$ C. están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de 20 cm de lado. Calcular la fuerza que actúa sobre cada carga.

PROBLEMA 9

Si la suma de dos cargas puntuales es 5.10^{-5}C. Y la fuerza eléctrica entre ellas cuando están separadas 2 m. es 1 N. ¿Cuál es el valor de cada carga?



PROBLEMA 10

Dos esferas cargadas iguales, de dimensiones pequeñas y masa = 1g, se hallan colgadas de un soporte mediante hilos de seda de 30 cm de longitud y penden de un punto en común. Cada hilo forma un ángulo de 5° con la vertical. Calcúlese el valor de las cargas.

PROBLEMA 11

Dos cargas puntuales idénticas de +q C están separadas por una distancia d (ver figura) Calcular **el trabajo por unidad de carga** necesaria para traer a otra carga +q desde un punto muy alejado (infinito) y sobre el plano bisector de la línea que une las cargas, hasta el punto medio de dicha distancia.

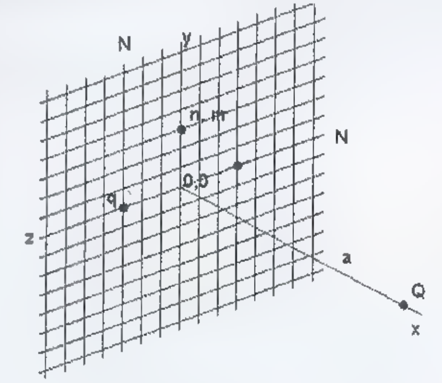


PROBLEMA 12

A lo largo de una longitud L del eje y se colocan N cargas q equiespaciadas simétricas al eje horizontal, a) calcular la fuerza sobre una carga Q ubicada en el eje horizontal como muestra la figura b) Si L =10 cm, N = 101 (para incluir la que coincide con el centro de coordenadas) a =10 cm y las cargas iguales a 10^{-11}C, determinar la magnitud de la fuerza. c) Calcule la fuerza sin incluir la carga del centro de coordenadas.

PROBLEMA 13

En una región cuadrada de lado L de un plano, se colocan NxN cargas q equiespaciadas simétricas al eje horizontal, a) calcular la fuerza sobre una carga Q ubicada en el eje horizontal como muestra la figura. b) Si L =10 cm, N = 101 (para incluir la que coincide con el centro de coordenadas) a =10 cm y las cargas iguales a 10^{-11}C, determinar la magnitud de la fuerza. c) Calcule la fuerza sin incluir la carga del centro de coordenadas.



PROBLEMA 14

Dos cuerpos cargados Q_1 y Q_2 con cargas iguales a 10^{-3} C están separados por una distancia d = 0.01 m. ¿Qué valor de masa debería tener el cuerpo de carga Q_2 para que su peso sea igual en magnitud a la fuerza eléctrica que existe entre ambos cuerpos?

PROBLEMA 15

Comparar la fuerza de gravitación universal y la fuerza de Coulomb.

PROBLEMA 16

Un átomo de hidrógeno está formado por un protón y un electrón que se mueve en torno a él. La intensidad de la fuerza atractiva que experimentan es igual a $8,2\ 10^{-18}$ N. Determinar el valor de la distancia media que los separa (radio de Bohr).

CAMPO ELÉCTRICO

PROBLEMA 1
Calcule el campo eléctrico creado por una carga puntual ubicada en el origen de un sistema de referencia, en los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 (ver figura 1). L = 1 cm $Q = 10^{-9}$ C.

PROBLEMA 2
Calcule el campo eléctrico creado por dos cargas puntuales en los puntos : P_1, P_2, P_3 (ver figura 2) L = 0.01 m, $Q_1 = 10^{-9}$ C, $Q_2 = -10^{-9}$ C

PROBLEMA 3
Para la distribución de cargas puntuales de la figura 3, determine el campo eléctrico en el punto P_0. Datos : $Q_1=10^{-9}$ C; $Q_2 = 2\ 10^{-9}$ C, $Q_3 = -2\ 10^{-9}$ C, $Q_4 = -10^{-9}$ C, L = 2 cm.

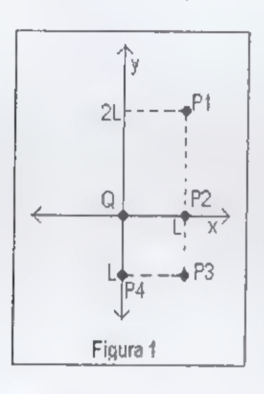


Figura 1

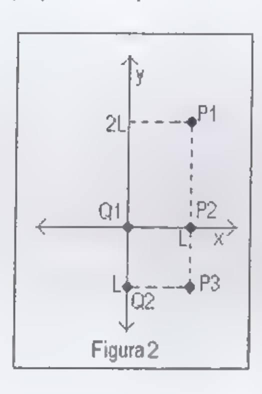


Figura 2

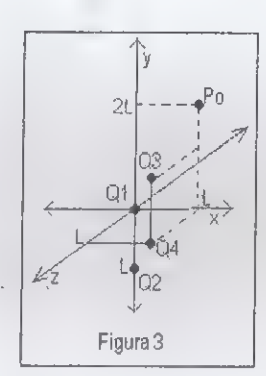


Figura 3

PROBLEMA 4
Calcule el campo eléctrico creado por una varilla de longitud L con densidad de carga uniforme λ a una distancia a de la misma como muestra la figura 4.

Figura 4

PROBLEMA 5
Calcule el campo eléctrico creado por un anillo de radio R con densidad lineal de carga λ, en un punto P como muestra la figura 5. Considere dos casos en el resultado final: a) a = 0 b) R<<a.

Figura 5

PROBLEMA 6
Calcule el campo eléctrico creado por un disco de radio R con densidad superficial de carga σ en un punto P, como muestra la figura 6.

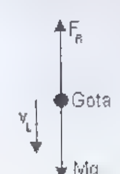
Figura 6

PROBLEMA 7
Se lanza una partícula de carga Q_0 y masa m con velocidad V_0 en una región donde existe un campo eléctrico uniforme E. Analice el movimiento de la partícula si: a) V_0 es paralela a E en el mismo sentido. b) V_0 es paralela a E en sentido contrario c) V_0 es perpendicular a E y d) cuando forma un ángulo con E.

PROBLEMA 8
En el espacio comprendido entre dos láminas planas y paralelas cargadas con cargas iguales y opuestas existe un campo eléctrico uniforme. Un electrón es abandonado en reposo sobre la lámina cargada negativamente llega a la superficie de la lámina opuesta, situada a 2 cm de distancia de la primera, al cabo

de 1.5 10^{8} seg a) Calcule la intensidad del campo eléctrico. b)Obtenga la velocidad del electrón cuando llega a la segunda lámina.

PROBLEMA 9



Una gota de aceite de 3 10^{-14} kg y $2x10^{-6}$ m de radio lleva 10 e extra ¿Cuál su velocidad terminal si cae en a) una región donde no hay campo eléctrico y b) un campo eléctrico cuya intensidad es 3 10^{5} N/C dirigido hacia abajo?. La viscosidad del aire $\eta = 1.8\cdot10^{-5}$N s /m^2($F_R = 6\cdot\pi\cdot r\cdot\eta\cdot v$). Desprecie la fuerza de empuje del aire.

PROBLEMA 10

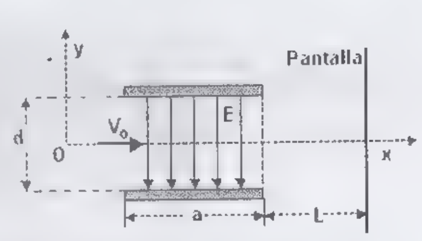
Se observa que una gota de aceite cargada, en un aparato de Millikan, cae una distancia de 1 mm en 27.2 s en ausencia de campo eléctrico. La misma gotita se mantiene estacionaria en un campo eléctrico de 2 $37x10^{4}$ N/C Calcule el número de electrones en exceso que porta la gota. La viscosidad del aire es de $1.8x10^{-5}$N s /m^2, la densidad del aceite es de 800kg/m^3.

PROBLEMA 11

Entre dos placas conductoras paralelas existe un campo eléctrico uniforme E = $16\cdot10^{4}$ N/C, las placas están separadas una distancia d = 0.08 m y tienen un ancho a = 0.02m, como muestra la figura. En esa región, ingresa un electrón con velocidad $V_o = 4\cdot10^{7}$ m/s

Determine la desviación respecto de su dirección original y la velocidad en el instante que sale de las placas paralelas.

Determine la desviación respecto de su dirección original cuando incide sobre la pantalla (L = 0.2 m).



PROBLEMA 12

Calcule el campo eléctrico creado por un dipolo en: a) puntos equidistantes de ambas cargas P1. b) puntos sobre la recta que une ambas cargas y fuera de ellas, P2. c) puntos sobre la recta que une ambas cargas y entre ellas, P3. Ver figura 6.

PROBLEMA 13

Un dipolo que tiene un momento dipolar p = q a C.m, forma un ángulo ϕ con la dirección de un campo eléctrico uniforme E a) Calcule el par que actúa sobre el dipolo. b) Calcule el trabajo necesario para invertir la orientación del dipolo desde su posición de equilibrio, paralelo al campo, a la opuesta.

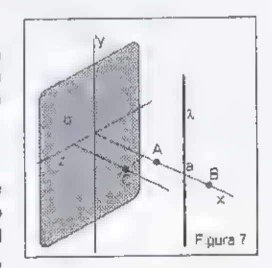


Figura 7

PROBLEMA 14

Un plano infinito tiene una distribución superficial de carga σ, en sus proximidades se encuentra un hilo infinito con densidad lineal de carga λ. Determine el campo eléctrico creado por ambos en los puntos A, B, C, (ver figura 7).

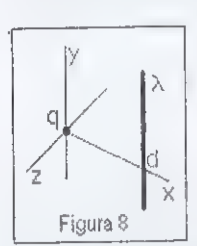


Figura 8

PROBLEMA 15

Una carga puntual q está ubicada en el origen de coordenadas y un hilo infinitamente largo con densidad lineal λ paralelo al eje Y corta el eje en x = d. Determinar los puntos sobre el eje X en los cuales el campo eléctrico se anula. Fig 8

LEY DE GAUSS

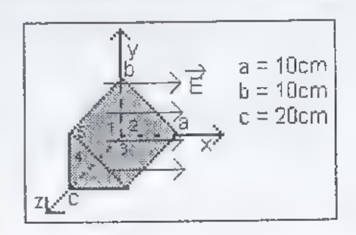
PROBLEMA 1

En una región donde existe un campo eléctrico constante E = 2.10^{6} N/C. Calcule el flujo eléctrico a través de una superficie plana de área 2 m^2 si se coloca

a) el plano de la superficie perpendicular a la dirección de campo.

b) el plano de la superficie paralelo a la dirección de campo.

c) el plano de la superficie formando un ángulo de 50º a la dirección de campo.



PROBLEMA 2

En la figura 1 se presenta una caja triangular en una región donde existe un campo eléctrico de intensidad $2{\cdot}10^5$ N/C. Calcule el flujo eléctrico a través cada cara de la caja y de la superficie completa.

PROBLEMA 3

Un campo eléctrico está dado por $\vec{E} = p z \vec{i} + q x \vec{k}$ donde p y q son constantes. Determine el flujo eléctrico a través de la superficie mostrada en la figura

2Q
Q
S_2
-2Q
-Q
S_3
S_1

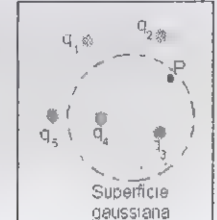
Figura 3

PROBLEMA 4

En la figura 3 se muestran tres superficies cerradas S_1, S_2 y S_3, y las cargas puntuales Q, -Q, 2Q y -2Q, Encuentre el flujo a través de cada superficie.

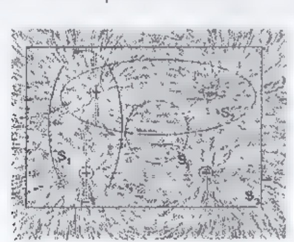
PROBLEMA 5

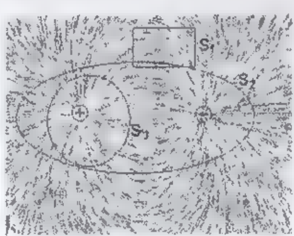
Considere la superficie gaussiana que rodea parte de la distribución de carga mostrada en la figura. a) ¿Cuál de las cargas contribuye al campo eléctrico en el punto P? b) Calcule el flujo del campo eléctrico a través de la superficie punteada de la figura



PROBLEMA 6

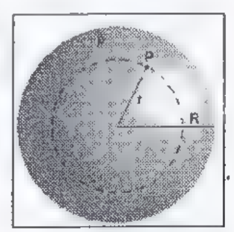
Para los espectros de campo eléctricos de las figuras, determine el flujo de acuerdo con las superficies indicadas





PROBLEMA 7

Una medida del campo eléctrico cerca de la superficie terrestre es 100N/C, apuntando radialmente hacia adentro, asumiendo que ese valor es constante en cualquier punto de la superficie, determine la carga total que deberia estar almacenada en la Tierra.



PROBLEMA 8

Calcular el campo eléctrico creado por una esfera conductora con carga Q y de radio a, en el interior y exterior de la misma.

PROBLEMA 9

Cálculo del campo eléctrico creado por una distribución de cargas con simetria esférica de radio R y densidad volumétrica constante ρ. Carga total Q

PROBLEMA 10

Calcular el campo eléctrico creado por una distribución de cargas con simetría esférica de radio R y densidad volumétrica $\rho(r) = A.r$, con $0 \leq r \leq R$ y A es una constante.

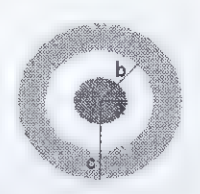
PROBLEMA 11

En los problemas 8, 9 y 10 se calculó el campo eléctrico creado por distribuciones de cargas con simetrías esférica para los casos: a) Una esfera conductora cargada. b) Una distribución esférica con densidad de carga constante. c) Una distribución esférica con densidad de carga variable constante $\rho(r) = A.r$, con $0 \leq r \leq R$. Compare las expresiones de estos campos y saque conclusiones.

PROBLEMA 12

En el interior de una región esférica de radio R existe una distribuida una densidad de carga $\rho(r) = A/r$, con $0 \le r < R$ y A es una constante. Determine el valor de la constante A si la carga total es Q y el campo eléctrico para $r \le R$ y para $r \ge R$.

PROBLEMA 13



Una esfera sólida de radio a tiene una densidad de carga ρ y una carga total Q. Concéntrica con esta esfera hay una esfera hueca conductora, no cargada, de radio interno b y radio externo c, como muestra la figura.

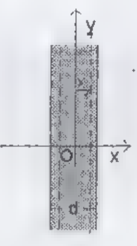
a) Determine la carga inducida en las superficies interna y externa de la esfera hueca. b) Determine la intensidad del campo eléctrico en las regiones $r \le a$, $a \le r \le b$, $b \le r \le c$ y $r \ge c$.

PROBLEMA 14

Considere un cascarón metálico esférico con carga Q, de radio interior R_1 y de radio exterior R_2, empleando la ley de Gauss establezca cómo se distribuye la carga y determine el campo eléctrico E(r) en todos los puntos.

PROBLEMA 15

Calcule el campo eléctrico debido a una lámina plana, conductora, infinita y cargada



PROBLEMA 16

Una placa de material aislante de espesor d tiene una densidad de carga uniforme positiva ρ, como muestra la figura a) Demuestre que el campo eléctrico a una distancia x de su centro y dentro de la placa es $E = \rho x / \varepsilon_0$ b) Suponga que un electrón de carga -e y masa m se coloca sin velocidad dentro de la placa a una distancia x del centro, demuestre que el electrón tendrá un movimiento armónico simple con frecuencia dada por $f = \frac{1}{2\cdot\pi}\sqrt{\frac{\rho\cdot e}{m\cdot\varepsilon_o}}$

PROBLEMA 17

Una placa de material aislante tiene una densidad de carga positiva no uniforme dada por $\rho(x) = C\,x^2$ donde x se mide desde el centro de la placa como muestra la figura y C es una constante. La placa es infinita en las direcciones y y z. Deduzca la expresión del campo eléctrico dentro y fuera de la placa.

PROBLEMA 18

Empleando la ley de Gauss determinar el campo eléctrico producido por un hilo muy largo con densidad de carga uniforme λ

PROBLEMA 19

Determine el campo eléctrico E(r) creado por una distribución cilíndrica de carga de radio R, con densidad de carga ρ constante y muy larga, para $r \le R$ y $r \ge R$.

PROBLEMA 20

Dada una distribución cilíndrica de carga de radio R y densidad de carga $\rho(r) = A/r$ con A constante, determine el campo eléctrico E(r) creado por una para $r \le R$ y para $r \ge R$. La longitud de la distribución es muy grande.

PROBLEMA 21

En el interior de una región cilíndrica de radio R existe distribuida una densidad de carga $\rho(r) = A\cdot r$ donde A es una constante y $0 \le r \le R$, determine el valor de A si la carga total es Q y el campo eléctrico E(r) para $r \le R$ y para $r \ge R$. Suponer que la región bajo estudio es muy larga.

PROBLEMA 22

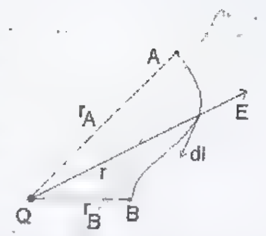
Un cilindro conductor de radio R_1 con carga Q está rodeado por un conductor hueco de radio interior R_2 y radio exterior R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$) Determine el campo eléctrico E(r) para $r < R_1$, $R_1 \le r \le R_2$, $R_3 \le r \le R_3$ y para $r \ge R_3$. Suponer que ambos conductores son muy largos.

POTENCIAL ELECTRICO

PROBLEMA 1

Calcule la diferencia de potencial entre los puntos A y B pertenecientes a una región donde existe un campo eléctrico creado por una carga puntual (ver figura)

Suponiendo que el punto A está infinitamente lejos de la carga Q, ¿cuál sería la diferencia de potencial entre ese punto y el punto B? Analizando este resultado represente gráficamente los puntos del espacio que tengan igual la diferencia de potencial.

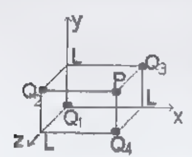


PROBLEMA 2

La separación más probable entre el electrón y el núcleo de H (un protón) es igual a r_o = 5,29 10^{-11} m. Calcular el potencial eléctrico V creado por el núcleo, a una distancia r_o del mismo. Calcule la energía potencial eléctrica U del átomo.

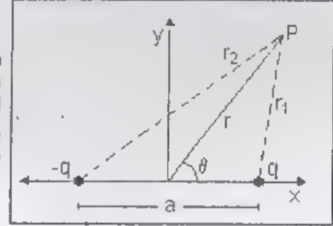
PROBLEMA 3

En la experiencia de dispersión de Rutherford que analiza el modelo planetario del átomo, se disparan partículas alfa (carga +2e y masa 6.6×10^{-27}Kg) con velocidad media $2.0\cdot10^{7}$ m/s hacia una lámina de oro fijo (carga eléctrica del núcleo de oro +79e), como muestra la figura. Calcular a qué distancia del núcleo la partícula alfa invierte el sentido de su movimiento.



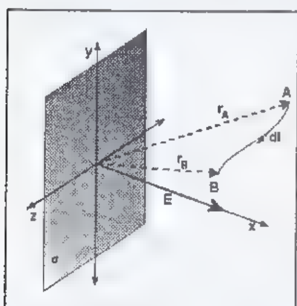
PROBLEMA 4

Calcular el potencial eléctrico de la distribución de cargas puntuales mostradas en la figura, en el punto P. El valor de las cargas son $Q_1 = 10^{-6}$ C, $Q_2 = -2.10^{-6}$ C, $Q_3 = 3.10^{-6}$ C y $Q_4 = -2.10^{-6}$ C. La distancia L = 0.1m



PROBLEMA 5

a) Calcule el potencial eléctrico producido por un dipolo en función r y θ, como indica la figura. b) Obtenga las expresiones de las líneas equipotenciales en el plano r y θ.



PROBLEMA 6

Calcular la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos A y B ubicados en una región donde existe una placa plana infinitamente grande con densidad de carga σ.



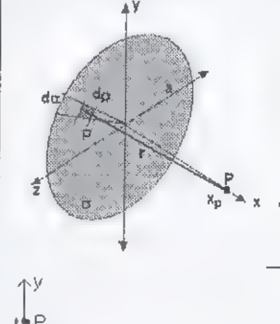
PROBLEMA 7

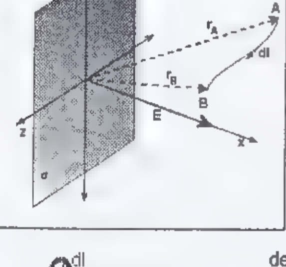
Cálculo del potencial eléctrico creado por un hilo recto cargado con densidad lineal λ, muy largo



PROBLEMA 8

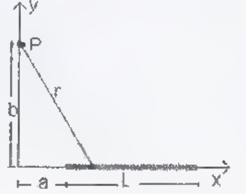
Calcular el potencial eléctrico creado por un disco de radio a con densidad de carga uniforme σ en el eje, una distancia x_P del centro del disco, ver la figura.





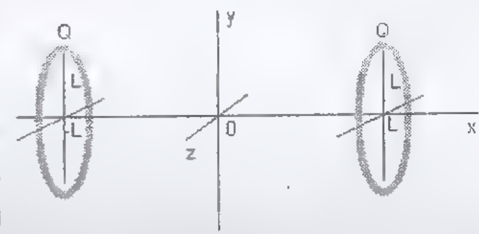
PROBLEMA 9

Considere un anillo de radio a que posee una carga Q distribuida uniformemente. Ver figura. Determine el potencial eléctrico en un punto P sobre el eje del anillo, a una distancia x de su centro. Analice los casos x >> a y x = 0



PROBLEMA 10
Considere una barra delgada de longitud L que posee una carga Q distribuida uniformemente. Determine el potencial eléctrico en un punto P a una distancia b a lo largo del eje y positivo, como muestra la figura.

PROBLEMA 11
Dos cargas en forma de anillo de radio L y carga +Q están centradas sobre el eje x y localizadas en sendos planos perpendiculares al mismo en los puntos x = - L y en x = L. Considere una carga puntual de masa m y carga q que está restringida a moverse a lo largo del eje x.



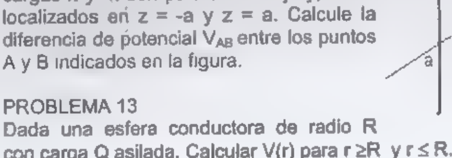
Determine el potencial entre los anillos de carga en función de x para $-L \leq x \leq L$

Demostrar que el potencial pasa por un mínimo en x = 0.

Demostrar que el potencial para $x \ll L$ toma la forma $V(0)+kx^2$

Deducir la frecuencia de oscilación de la masa m si se desplaza ligeramente del origen y se deja libre.

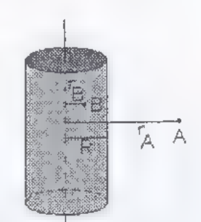
PROBLEMA 12
Dos hilos muy largos con densidades de cargas λ y $-\lambda$ son paralelos al eje y, están localizados en $z = -a$ y $z = a$. Calcule la diferencia de potencial V_{AB} entre los puntos A y B indicados en la figura.



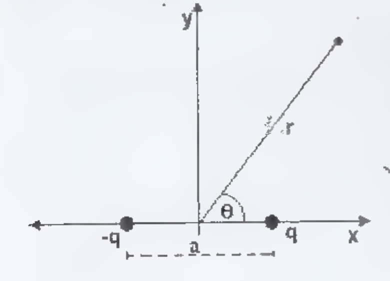
PROBLEMA 13
Dada una esfera conductora de radio R con carga Q asilada. Calcular V(r) para $r \geq R$ y $r \leq R$.

PROBLEMA 14
Una esfera conductora de radio a está conectada a una batería de potencial eléctrico V_1; rodeando a ésta se encuentra otra esfera conductora de radio b que puede o no estar conectada a la batería V_2. a) Si el interruptor A está cerrado y el B abierto, calcular E(r) para $r < a$; $a < r < b$; $r > b$. b) si el interruptor A está abierto y el B cerrado calcular E(r) para los mismos puntos que en el caso anterior. c) Suponga que $V_2 = 0$, repita el cálculo del item b, si el interruptor A está cerrado. d) Suponga que los dos interruptores están cerrados, repita el cálculo.

PROBLEMA 15
Calcular la diferencia de potencial V_{AB} debido a una distribución cilíndrica de carga de radio R y densidad de carga ρ. Los puntos A y B está indicados en la figura.



PROBLEMA 16
¿Cuántos electrones se deben quitar a un conductor esférico inicialmente descargado de radio 0 3 m para producir un potencial de 10kV en la superficie?



PROBLEMA 17
Dos esferas conductoras de radio 0.1m y 0.4 m respectivamente, están muy separadas pero conectadas con un hilo conductor. Se deposita una carga total de $20 \cdot 10^{-6}$ C en esta combinación de esferas. a) ¿Cómo se distribuye la carga?. b) ¿cuál es el potencial eléctrico de cada esfera?. c) ¿cuál es el campo eléctrico de cada esfera?

PROBLEMA 18
El potencial eléctrico de un dipolo como momento dipolar eléctrico p = qa está dado por

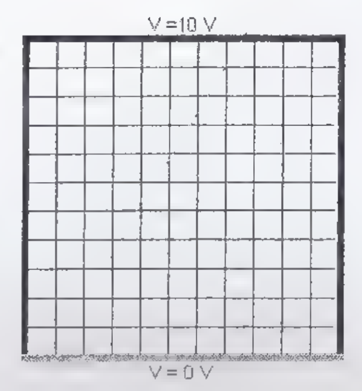
$$V_p(r,\theta)=\frac{p}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\cos(\theta)}{r^2}$$

Determine las componentes del campo eléctrico.

PROBLEMA 19
A partir de una línea equipotencial V(x, y) = Cte. construya una línea de fuerza del campo eléctrico.

PROBLEMA 20
Encuentre las líneas de fuerzas del campo eléctrico. en el plano x y de la figura, donde se halla un dipolo eléctrico.

PROBLEMA 21
En la figura se muestra dos electrodos uno a potencial eléctrico igual 10 V y el otro a 0 V Calcular del potencial eléctrico en todos los puntos de intersección del retículo contenido por la región limitada por los electrodos.



CAPACIDAD

PROBLEMA 1
Calcular la capacidad de una esfera metálica cargada de radio R, que se encuentra aislada. Analice el resultado. Determine la capacidad eléctrica de la Tierra (R = 5400 km).

PROBLEMA 2
Calcular la capacidad de:
un condensador plano.
un condensador esférico.
un condensador cilíndrico.

PROBLEMA 3
Un condensador de placas paralelas tiene un área de placa de 100 cm^2 y una capacidad de 7pF. ¿Cuál es la separación entre las placas?

PROBLEMA 4
Cuando se aplica una diferencia de potencial de 500 V entre las placas de un condensador de placas paralelas, estas tiene una densidad de carga de 400 nC/m^2 ¿Cuál es el espacio entre ellas?

PROBLEMA 5
Calcule la capacidad de un condensador plano de superficie cuadrada, si la longitud del lado es 1 cm y la separación entre las placas 1m m. Calcule de nuevo la capacidad si a) cambia al doble el lado y deja fija la separación. b) cambia al doble la separación y deja fijo el lado. Haga un análisis de los resultados.

PROBLEMA 6
Un condensador esférico tiene radio interno R_1 = 1 cm y radio externo R_2 = 2 cm. Calcular la capacidad. Repita el cálculo si el radio externo es R_2 = 1.1 cm, y analice el resultado comparándolo con la capacidad de un condensador plano.

PROBLEMA 7
Considere un condensador plano con una de sus placas móviles, inicialmente se encuentra cargado y aislado. Si se separan las placas al doble de la distancia original, ¿cuál es el nuevo valor del potencial y del campo? Haga el balance energético entre los dos estados.

PROBLEMA 8

Considere un condensador plano con una de sus placas móviles que se encuentra conectado a una fuente de diferencia de potencial constante, si se acercan las placas a la mitad de la distancia original. Encuentre la expresión de la carga y del campo en la nueva configuración. Haga el balance energético entre los dos estados.

PROBLEMA 9

Un cable coaxial de 100 m de longitud que tiene un conductor interno de radio 1.25 mm con una carga de 8 μC, está rodeado por otro conductor de radio interior 3.6 mm y una carga de -8 μC. a) ¿ Cuál es la capacidad del cable? b) ¿Cuáles la diferencia de potencial entre los dos conductores?

PROBLEMA 10

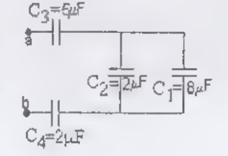
Dos condensadores de 1μ F y 3μ F se conectan en serie y la asociación es conectada a una batería de 12 V ¿cuál es el valor de la capacidad equivalente de la asociación?. ¿Cuáles son la diferencia de potencial sobre cada condensador y la carga almacenada en cada uno de ellos?

PROBLEMA 11

Dos condensadores de 1μ F y 3μ F se conectan en paralelo y la asociación es conectada a una batería de 12 V ¿cuál es el valor de la capacidad equivalente de la asociación?. ¿Cuáles son la diferencia de potencial sobre cada condensador y la carga almacenada en cada uno de ellos?

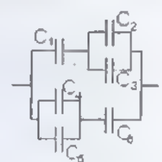
PROBLEMA 12

Considere el conjunto de condensadores del circuito que se observa en la figura. a) Encuentre la capacidad equivalente entre los puntos a y b. b) Determine la carga en cada condensador cuando la diferencia de potencia entre a y b es de 20 V



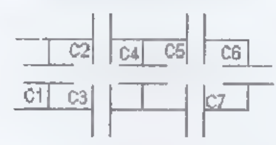
PROBLEMA 13

Calcular la capacidad de cada uno de los siguientes circuitos si la capacidad de cada condensador es 10^{-6} F.



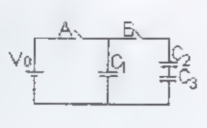
PROBLEMA 14

Calcular la capacidad equivalente de cada uno de los siguientes circuitos si la capacidad de cada condensador es 10^{-6} F.



PROBLEMA 15

En el circuito de la figura hay dos interruptores A y B inicialmente ambos están desconectados y todos los condensadores descargados. a) Calcular el valor de la carga sobre C_1 si se cierra el interruptor A y se deja abierto el B. b) Con C_1 cargado, se abre el interruptor A y se cierra B, calcular la carga y la diferencia de potencial en cada condensador Datos Vo = 10 V, $C_1 = 10^{-6}$ F, $C_2 = 10^{-6}$ F y $C_3 = 2\times10^{-6}$ F



PROBLEMA 16

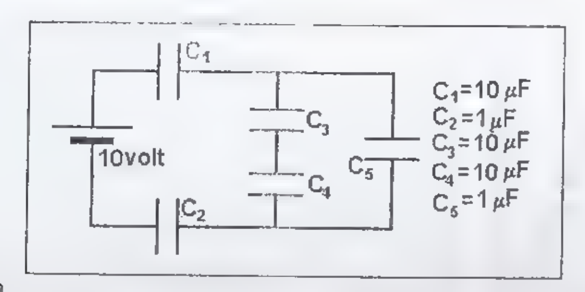
Calcule la energía almacenada en un condensador

a) Plano.
b) Cilíndrico.
c) Esférico.

PROBLEMA 17

Calcular la capacidad equivalente del circuito de la figura

Si la diferencia de potencial V_b-V_a = 10 volt, determine la carga y la diferencia de potencial sobre cada uno de los condensadores.



PROBLEMA 18

Calcular la fuerza entre las placas de un condensador plano si el condensador está cargado y aislado.

PROBLEMA 19

Calcular la fuerza entre las placas de un condensador plano si se considera al condensador conectado a una batería

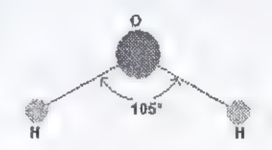
DIELECTRICOS

PROBLEMA 1

Si se tiene un mol de tetracloruro de carbono CCl_4 - (ε_r = 2.24 a 20 °C, δ= 1.6 g/ cm^3) en un campo eléctrico de 10^7 V/m. a) Determine el momento dipolar eléctrico de una molécula b) Calcule la distancia media entre los centros de cargas.

PROBLEMA 2

Una molécula de agua se puede representar como un triángulo isósceles con dos electrones orbitales de carga total –2 e procedentes del oxigeno en su vértice superior y con una carga positiva de +e correspondiente a un núcleo de hidrógeno en cada vértice de la base. La distancia media entre los átomos de hidrógeno y el oxigeno es de 3.2 A y el ángulo superior vale 105°. ¿Cuál es el momento dipolar permanente de la molécula?



PROBLEMA 3

La molécula de agua tiene un momento dipolar permanente p = $6.3.10^{-29}$ C.m . a) Determine la distancia media entre **los centros de cargas** b) Si se tiene 10^{-3} mol de agua con todos sus dipolos orientados en la dirección del campo eléctrico de intensidad E= 3.10^5 N/C. ¿Cuál es el trabajo necesario para rotar los dipolos 90°?

PROBLEMA 4

Una placa plana de dieléctrico (ε_r = 5) es colocada perpendicular a un campo D uniforme con una intensidad de 1C/m^2. Si la placa ocupa un volumen de 0.1 m^3 y está uniformemente polarizada. Determine la intensidad del vector polarización en la placa y el momento dipolar total de la placa.

PROBLEMA 5

Una placa delgada de material (ε_r = 4) es colocada perpendicular a un campo eléctrico uniforme. La densidad superficial de carga de polarización $\sigma_p = 5{\cdot}10^{-6}$ C/m^2. a) Determine la intensidad del vector polarización b) la intensidad del campo eléctrico E en la placa y fuera de ella c) la intensidad del vector desplazamiento D en la placa y fuera de ella.

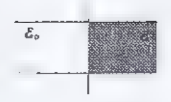
E

$-\sigma_p$

$+\sigma_p$

PROBLEMA 6

Un condensador de placas paralelas dispuesto horizontalmente se llena la mitad derecha con un dieléctrico de permitividad ε mientras que la mitad izquierda se llena con aire (ε_0). La separación entre las placas es d =10 mm y está a una diferencia de potencial de 100 voltios. Hallar la intensidad de los campos E, D y P en ambas mitades, suponer que $\varepsilon = 3\,\varepsilon_0$.



PROBLEMA 7

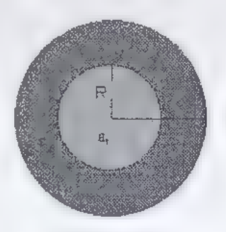
Un condensador de placas paralelas dispuesto horizontalmente tiene una separación entre las placas igual a 10 mm y está a una diferencia de potencial de 100 voltios. En su interior hay un dieléctrico de permitividad ε, con un espesor igual a 5 mm apoyado en la placa inferior. El espacio de arriba está lleno de aire (ε_0). a) Determine la intensidad de los campos E, D y P en el espacio lleno de aire y en el medio dieléctrico. b) Hallar la diferencia de potencial como una función de la distancia entre las placas. Suponer que el área de las placas 0.01 m^2 y $\varepsilon = 3\,\varepsilon_0$.

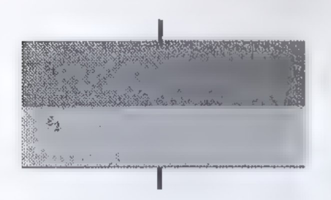
PROBLEMA 8

¿Cuál es la intensidad de los campos E, D y P a una distancia r = 100 mm de una carga puntual de Q = 1μC en un medio infinito de a) aire. b) un dieléctrico con que $\varepsilon_r = 9$?

PROBLEMA 9

Una carga puntual ($q = 10^{-6}$ C) está en el centro de una esfera dieléctrica ($\varepsilon_{1r} = 9$) de radio R = 1 cm, la que a su vez se halla rodeada por otro medio dieléctrico ($\varepsilon_{2r} = 4$). Determine la intensidad de los campos E, D y P para r < R y r > R. y la densidad superficial de cargas de polarización en la superficie de separación.





PROBLEMA 10

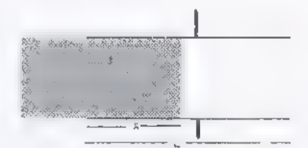
En un condensador de placas paralelas se colocan dos medios dieléctricos (1 y 2) como muestra la figura determine el valor de la capacidad.

PROBLEMA 11

En un condensador de placas cuadradas paralelas de lado L se colocan dos medios dieléctricos (ε_1 y ε_2) como muestra la figura determine el valor de la capacidad.

PROBLEMA 12

Un cable coaxial tiene una capacidad de 75 pF/m, su conductor externo un diámetro interno 0.9 cm y está lleno de polietileno (ε_r = 2.2) ¿Cuál es el diámetro del conductor interno?



PROBLEMA 13

En un condensador plano de placas cuadradas de lado L y separación d, se introduce una placa de dieléctrico de constante ε una distancia x dentro del mismo. Como muestra la figura.

Encuentre la capacidad equivalente.

Calcule la energía almacenada en el condensador si la diferencia de potencial es V

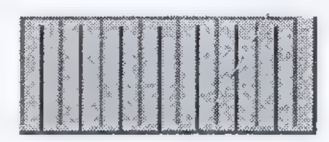
Encuentre la magnitud y sentido de la fuerza ejercida sobre el dieléctrico, suponiendo que la diferencia de potencial se mantuvo constante y no se tiene en cuenta los efectos de los extremos.

PROBLEMA 14

Un condensador placas cuadradas de lado L, paralelas y separación d a una diferencia de potencial Vo se sumerge en un fluido dieléctrico de permitividad ε. El fluido tiene una densidad δ la gravedad actúa hacia abajo.¿ A qué altura sube el fluido entre los electrodos?

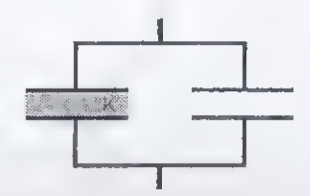
PROBLEMA 15

Un condensador está construido mediante el intercalado de placas planas como muestra la figura. La separación entre las placas adyacentes es 0.5 cm y el área efectiva de las placas es de 5 cm^2. Ignorando los efectos de bordes, Calcule la capacidad de la unidad, considerando que entre placas existe un dieléctrico de constante dieléctrica relativa K = 2.



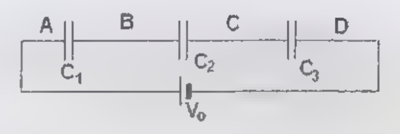
PROBLEMA 16

Dos condensadores iguales están conectados en paralelo, cargados a una diferencia de potencial V_1 y después se los aísla de la fuente. Se introduce un dieléctrico de constante K en uno de los condensadores de modo que llene completamente el espacio entre las placas . Calcular la cantidad de carga verdadera que pasa de un condensador al otro y la diferencia de potencial final V_2 en los condensadores en función de C, V_1 y K



PROBLEMA 17

Se conectan en serie tres condensadores idénticos con aire entre sus placas y luego se une el conjunto a una batería de 6 V, como se muestra la figura A continuación se llenan los condensadores C_1 y C_2 con líquidos de constantes dieléctricas relativas $K_1 = \varepsilon_1/\varepsilon_0$ y $K_2 = \varepsilon_2/\varepsilon_0$ respectivamente. Las diferencia de potencial finales en estos condensadores son $\Delta V_{AB} = 1$ V y $\Delta V_{AB} = 2$ V. Hallar K_1 y K_2



CORRIENTE ELECTRICA. LEY DE OHM

PROBLEMA 1

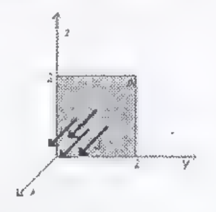
Una barra de cobre de sección transversal rectangular de 2 por 8 mm y largo 2m de tiene aplicada una diferencia de potencial de 50 mV entre sus extremos. Hallar las siguientes cantidades y dar las unidades en cada caso: a) la resistencia R de la barra, b) la corriente, I c) la densidad de corriente J, d) el campo eléctrico E, e) la potencia perdida P en la barra, f) la energía perdida W por hora, g) la velocidad de deriva de los portadores de carga.

PROBLEMA 2

Un galvanómetro sensible puede medir una corriente del orden de 10^{-8} A.
¿Cuántos electrones cruzan por segundo una sección de un conductor por el cual circula esta corriente?
¿Cuál es la velocidad media de los electrones en el conductor, si su sección transversal es 1 mm^2?
¿Cuánto tarda un electrón en recorrer un distancia de 1 cm en el conductor?
Suponer que hay 9×10^{28} electrones libres por m^3.

PROBLEMA 3

¿Qué intensidad de campo eléctrico es necesaria para producir la misma densidad de corriente en un conductor de aluminio que en el conductor de cobre? Suponer que intensidad de corriente en el cobre es 10 A.y su sección es 1 mm^2.

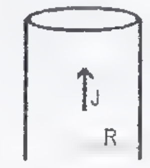


PROBLEMA 4

Si la densidad corriente es $\vec{j} = 3yz\,\vec{i}$ hallar la corriente I a través de una superficie cuadrada de 2 m de lado con un extremo en el origen y el otro en (0, 2 ,0), (0, 0, 2) y (0, 2, 2).

PROBLEMA 5

Un cable de sección circular y diámetro 1 cm tiene una densidad de corriente J = C r, donde C es una constante y 0 < r < R. Si la corriente total es 1 A. Determine el valor de la constante C.

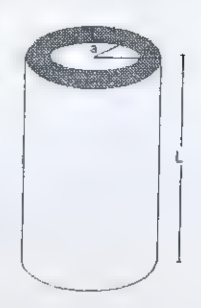


PROBLEMA 6

Si Q(t) = Qo {1- exp(-t / R C)} donde Qo, R y C son constantes

a) Obtener la expresión de la corriente. b) Hacer la representación gráfica de Q(t) y de I(t).

PROBLEMA 7



Dos cilindros coaxiales conductores perfectos de longitud L=15 cm, de radio interior a=0.25 cm y exterior b=0.5 cm se mantienen a una diferencia de potencial V=12 volt y se llena el espacio entre ambos con una sustancia de resistividad ρ = 400 ohm. m. Determinar la resistencia R y el valor de la corriente.

PROBLEMA 8

Para cada una de las geometrías mostradas en la figura, calcular la resistencia entre las dos placas conductoras perfectas cuadradas de lado L, entre las cuales hay dos materiales de conductividades σ_1 y σ_2, suponer una separación entre placas d.





Figura 1

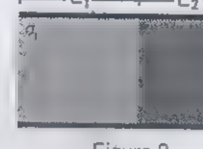


Figura 2

PROBLEMA 9

Un campo eléctrico de 2.1 kV/m se aplica a un elemento de plata (ρ = 1.59 10^{-8} Ω.m) de sección transversal uniforme. Calcule a) la densidad de corriente J b) la velocidad de deriva de los electrones libres

PROBLEMA 10

¿Qué intensidad de campo eléctrico es necesaria para producir la misma densidad de corriente en un conductor de aluminio que en el conductor de cobre? Suponer que intensidad de corriente en el cobre es 10 A.y su sección es 1 mm^2.

PROBLEMA 11

Con dos materiales distintos se construye una resistencia y se realizaron las siguientes mediciones

	Material 1	Material 2
I (A)	V_{ab} (V)	V_{ab} (V)
0	0	0
0,5	2,1	4.7
1,0	4,3	5,8
2,0	8,7	7,0
4,0	17,4	8,5

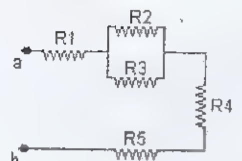
Construir una gráfica que representa V_{ab} en función de I para cada material ¿Obedecen a la ley de Ohm? ¿Cuál es la resistencia del alambre expresada en ohm? ¿Es constante?.

PROBLEMA 12

Un conductor cambia el valor de la resistividad ρ en función de la temperatura. Para el cobre se obtuvieron estos valores Encontrar los coeficientes de

$\rho(T) = \rho_o \cdot (1 + \alpha \cdot (T - 293)$ con T en K y ρ en Ω m.

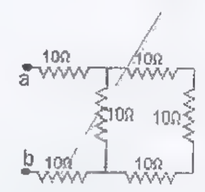
T (K)	$\rho \cdot 10^{-8}$ Ω m
300	1.767
320	1.901
340	2.035
360	2 169
380	2.304
400	2438



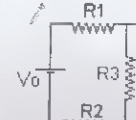
PROBLEMA 13
Determine el valor de la resistencia equivalente del circuito de la figura.



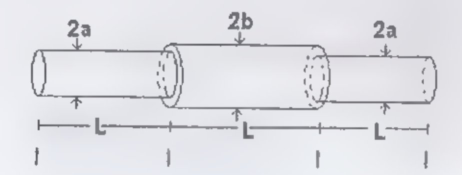
PROBLEMA 14
Determine el valor de la resistencia equivalente del circuito de la figura. Todas las resistencias son iguales a 10 Ω.



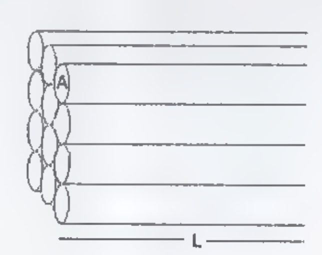
PROBLEMA 15
Calcule la potencia disipada en cada una de las resistencia del circuito $V_o = 5$ V; $R_1 = R_3 = R_5 = 5\ \Omega$; $R_2 = R_4 = 10\ \Omega$.



PROBLEMA 16
Calcular la resistencia de un cuerpo conductor como el representado en la figura



PROBLEMA 17
N hilos conductores de longitud L y sección A están colocados como muestra la figura, determine su resistencia equivalente.



CIRCUITOS ELECTRICOS. LEY DE KIRCHHOFF

PROBLEMA 1
En el circuito de la figura, determinar las corrientes y la diferencia de potencial $V_b - V_a$

Los valores de las resistencias, en ohm, son

$$R_1 = 25\Omega \quad R_2 = 20\Omega \quad R_3 = 10\Omega \quad R_4 = 15\Omega \quad R_5 = 30\Omega$$

los valores de las fuentes, en voltios, son

$$E_1 = 10V \quad E_2 = 15V \quad E_3 = 9V$$

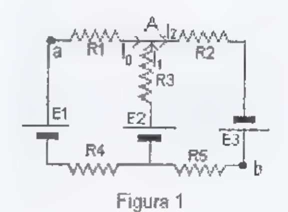


Figura 1

PROBLEMA 2

En el circuito de la figura, está conectado un condensador de 1μF, determine la carga del mismo.

Los valores de las resistencias son



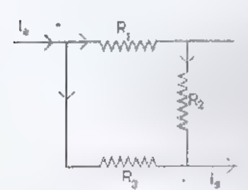
$R_1 = 15\Omega \quad R_2 = 25\Omega \quad R_3 = 20\Omega \quad R_4 = 15\Omega$

$R_5 = 30\Omega \quad R_6 = 30\Omega$

Los valores de las fuentes son

$E_1 = 24V \quad E_2 = 10V \quad E_3 = 18V \quad E_4 = 10V$

La capacidad $C = 1\mu F$.



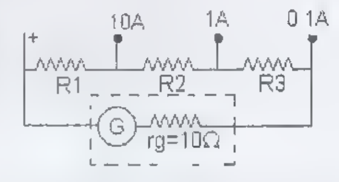
PROBLEMA 3

Determine las corrientes que circulan en las resistencias, para el circuito de la figura.

$R_1 = 6\Omega \quad R_2 = 10\Omega \quad R_3 = 9\Omega \quad I_e = 1A \quad I_s = 0.25A$

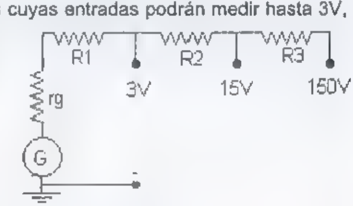
PROBLEMA 4

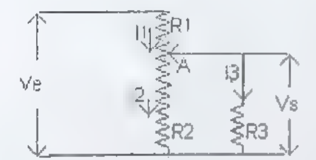
Un circuito básico de un amperímetro está mostrado en la figura. El galvanómetro de bobina móvil empleado tiene una resistencia r_g = 10 Ω y para una corriente de 0.01 A. se desvía a fondo de escala. Hallar los valores de resistencias necesarias para que se desvíe a fondo de escala con una corriente de 10 A, 1 A y 0.1 A.



PROBLEMA 5

La figura muestra un circuito típico de un voltímetro de tres escalas cuyas entradas podrán medir hasta 3V, 15V y 150V. El galvanómetro de bobina móvil empleado tiene una resistencia r_g =10 Ω y para una corriente de 0.001 A. se desvía a fondo de escala. Hallar los valores de las resistencias indicadas para que, en cada caso, se desvíe a fondo de la escala.



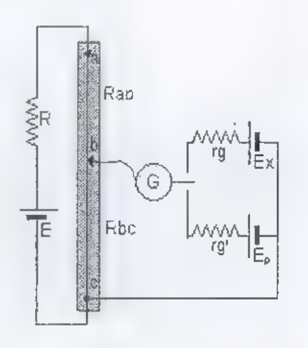


PROBLEMA 6

Encuentre la relación entre Ve, Vs y la corriente de entrada I_1 en el circuito de la figura.

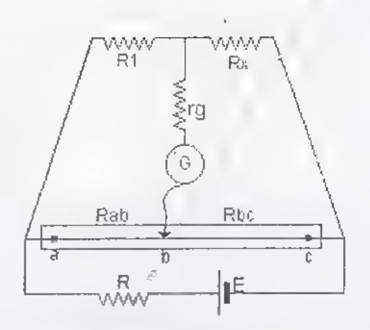
PROBLEMA 7

Un potenciómetro es un circuito que se utiliza para medir la fuerza electromotriz de una fuente por comparación con una fuerza electromotriz de una fuente de referencia. Un circuito típico es el mostrado en la figura, donde el punto b representa un contacto deslizable entre los puntos a y c. Esta versión de potenciómetro se llama potenciómetro de alambre - deslizable, la resistencia variable es un alambre. Plantee las ecuaciones de Kirchhoff del circuito y encuentre una relación entre las fem. de las fuentes cuando el potenciómetro es balanceado ($i_g = 0$).

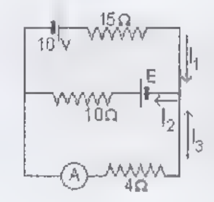


PROBLEMA 8

El circuito de la figura es un puente de Wheastone, donde se reemplazaron dos resistencias por resistencias de alambre R_{ab} y R_{bc}, este dispositivo sirve para medir con exactitud resistencias desconocidas. El principio de funcionamiento es muy simple se varía el contacto b, hasta que no circule corriente por el galvanómetro, en estas condiciones se dice que el puente está balanceado, de esta manera se cumple una relación entre las resistencias que permite calcular la R_x. Plantee las ecuaciones de Kirchhoff del circuito, imponga la condición de $I_g = 0$ y encuentre la relación mencionada.



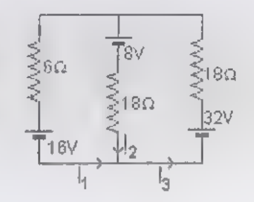
PROBLEMA 9

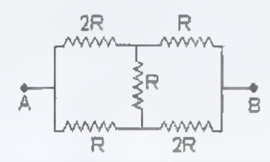


La lectura en el amperímetro del circuito de la figura es 2 A. Determinar las corrientes en las otras ramas y el valor de la fem E.

PROBLEMA 10

Calcule la potencia disipada en cada resistencia en el circuito de la figura. b) Determine los valores de I_1 e I_3 en el circuito si la batería de 8 V se reemplaza por un condensador de 4μF, encuentre la carga almacenada en el mismo.



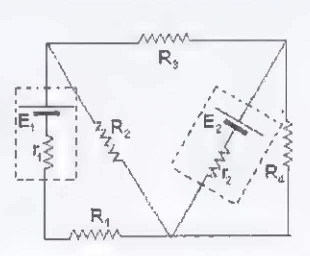


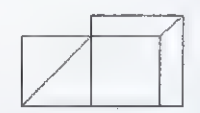
PROBLEMA 11

¿Cuál es la resistencia entre A y B en el circuito de la figura? Emplear las leyes de Kirchhoff.

PROBLEMA 12

En el circuito de la figura las baterías tienen E_1 = 25V y E_2 = 5 V y las resistencias internas $r_1 = r_2 = 1.2\ \Omega$ Hallar las diferencias de potencial ΔV_1 y ΔV_2 entre las terminales de las baterías. $R_1 = R_3 = 20\ \Omega$, $R_2 = R_4 = 15\ \Omega$.





PROBLEMA 13

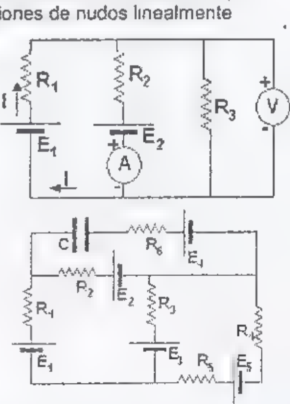
En la red mostrada en la figura, cada rama tiene al menos una resistencia y una fem, asumiendo que se conoce estos valores a) Hallar el número de ecuaciones para resolver el sistema. b) Hallar el número de ecuaciones de nudos linealmente independientes que se necesitan. c) Hallar el número de ecuaciones de mallas necesarias.

PROBLEMA 14

Si el voltímetro de la figura mide $\Delta V_m = 16V$ y el amperímetro 0.5A. Hallar los valores de la resistencia R_2, de la corriente I y de la fem E_1 de la batería. $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 15\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$, $E_2 = 24$ V.

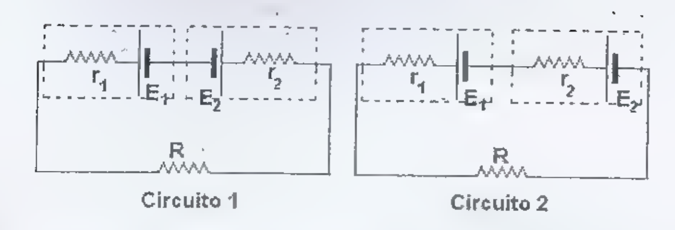
PROBLEMA 15

Halle los valores de las corrientes en el circuito de la figura y la carga sobre el condensador C. Los valores de los elementos del circuito son $R_1 = R_3 = R_5 = 20\ \Omega$, $R_2 = R_4 = R_6 = 15\ \Omega$ y $E_1 = E_3 = E_5 = 12V$, $E_2 = E_4 = 18V$, C = 100μF.



PROBLEMA 16

Determinar la intensidad de corriente para cada circuito



FUERZAS MAGNETICAS SOBRE CARGAS MOVILES Y ELEMENTOS DE CORRIENTES

PROBLEMA 1

Si una partícula cargada con velocidad **v** ingresa en un campo magnético uniforme **B**, demostrar que: a) describe una circunferencia si **v es perpendicular a B**. b) describe una hélice cilíndrica si **v** forma ùna ángulo con **B**.

PROBLEMA 2

Dado un haz de electrones cuya distribución de velocidades es al azar, encontrar un método para seleccionar los electrones con una velocidad determinada, empleando campos eléctricos y magnéticos.

PROBLEMA 3

Un electrón cuya velocidad es el 1 % de la velocidad de la luz en el vacío, penetra en un campo magnético uniforme, formando su velocidad un ángulo recto con el campo B. a)¿Cuál es el valor de B si el electrón se mueve con una órbita de radio 1cm? b)¿Cuál es el período del electrón en su órbita?

PROBLEMA 4

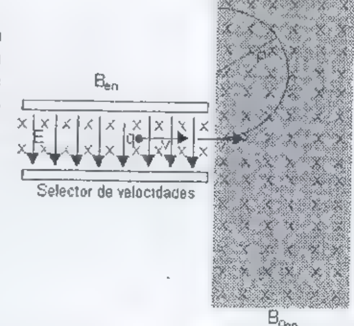
Un ciclotrón acelera protones a velocidades no relativistas. El imán del ciclotrón posee una intensidad de campo de 1 tesla. ¿A qué frecuencia orbitan los protones en el acelerador? masa del protón = $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

PROBLEMA 5

Un protón órbita en un ciclotrón cuyo campo magnético es de 2 tesla. a)¿Cuál debe ser la frecuencia del campo eléctrico oscilante en el ciclotrón? b) Demuestre que la cantidad de movimiento del protón para un valor ρ del radio está dada por: $m_p \cdot vo = Bo \cdot q_p \cdot \rho$. c)¿Cuál es la energía cinética del protón si el radio de la órbita es: i)10 cm, ii) 100 cm; Exprese los valores en Mev.

PROBLEMA 6

El espectrógrafo de masas es un instrumento ideado para determinar la relación carga - masa de las partículas. a) Haga un esquema del dispositivo, indicando claramente la región donde se halla el campo magnético. b) Exprese la relación q/m de las partículas en términos de los parámetros que se manejan en el espectrógrafo. c) Para un haz de partículas de igual carga y distinta masa el dispositivo dispersa el haz, ¿por qué?

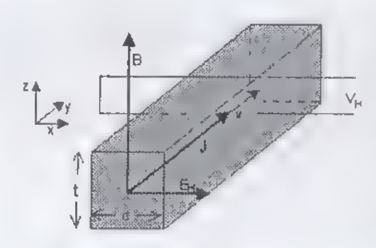


PROBLEMA 7

En un espectrómetro de masas se estudian los isótopos de un elemento simplemente ionizados. En su selector de velocidades actúan un campo B = 0.01T y un campo E = 200 V/m. En la cámara de deflexión existe un campo magnético uniforme de 1T; los iones impresionan una película fotográfica dejando trazas separadas 8.28 cm. El radio menor de las órbitas es 60.17 cm. ¿Cuál es la masa en gramos de cada isótopo?

PROBLEMA 8
Un ciclotrón es un dispositivo para acelerar partículas cargadas mientras que ellas son forzadas a viajar en una camino circular por un campo magnético. Una fuente, digamos, de deuterones, es colocada en el centro del dispositivo
Un deuterón es una combinación de un protón y de un neutrón con una carga eléctrica (1 e) y 2 u.m.a. (unidad de masa atómica) es la masa promedio es la masa promedio de un residente en el núcleo (neutrón o protón). El deuterio sale de la fuente con una pequeña velocidad a la derecha.
La partícula entra en un área semicircular abierta entre placas en forma de "D" y viaja en una orbita circular hasta salir del área "D" El voltaje entre las D's, como ellas se llaman es alternativo de forma seno dal así que cuando deja la D derecha la partícula es acelerada y alcanza una nueva orbita mayor que la que traía de la D izquierda
Cuando la partícula deja la D izquierda el voltaje de nuevo cambia así esa aceleración es acompañada a través de las D's.
Dibuje un esquema de un ciclotrón.
Calcule la frecuencia de oscilación del voltaje de las D's para un deuterón en un campo de magnético de 2.0T. ¿Cuál es la energía máxima de un deuterón en este ciclotrón con radio promedio máximo de 1.5 m?

PROBLEMA 9

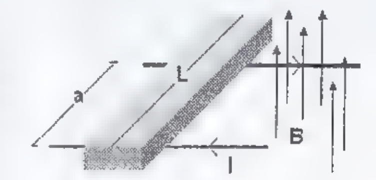


Por un conductor de sección A y número de portadores de carga por unidad de volumen n, circula una corriente I Al conductor se lo coloca en un campo magnético como muestra la figura. Determine la diferencia de potencial generada a través del conductor, conocida como voltaje Hall.

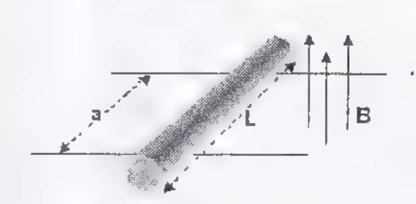
PROBLEMA 10
Un conductor de 0.5 cm de espesor se utiliza como muestra en la medida del efecto Hall, si un voltaje Hall de 35 µV es medido para una corriente de 21 A. En un campo magnético de 1.8 T. Calcule el coeficiente Hall para el conductor.

PROBLEMA 11
Suponga que una hoja de plata lleva una corriente de 5 A. Si la corriente está dirigida perpendicular a un campo magnético de 1.5 T ¿cuál debe ser el espesor de la hoja para producir un voltaje de Hall de :a) 1V y b) 1 mV.

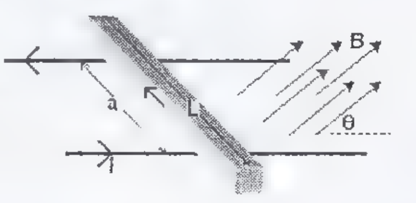
PROBLEMA 12
Una barra conductora de sección rectangular y de longitud L = 0.45 m, está apoyada sobre dos conductores que se encuentran separados a = 0.40 m, como muestra la figura. El conjunto está en un campo de inducción magnética constante de intensidad B = 1.5 T. Si por los conductores circula una corriente de 5 A en el sentido indicado por la figura ¿Cuál es la intensidad, dirección y sentido de la fuerza sobre la barra?



PROBLEMA 13
Una barra cilíndrica de radio R = 1 mm de cobre y de longitud L = 0.15 m, está apoyada sobre dos rieles conductores que se encuentran separados a = 0.10 m, como muestra la figura. El conjunto está en un campo de inducción magnética constante de intensidad B = 0.8 T perpendicular al plano de los rieles. ¿Qué valor de corriente debe circular por los conductores para que la barra comience a rodar?. Considere que existe rozamiento por rodadura, el coeficiente de rozamiento por rodadura k = 0.005.



PROBLEMA 14
Una barra de cobre de sección cuadrada ($S = 2\ mm^2$) y de longitud L = 0.45 m, está apoyada sobre dos conductores que se encuentran separados a = 0.40 m, como muestra la figura. El conjunto está en un campo de inducción magnética constante de intensidad B = 1.5 T que forma un



ángulo θ = 25° con el plano. Si por los conductores circula una corriente de 5 A en el sentido indicado por la figura

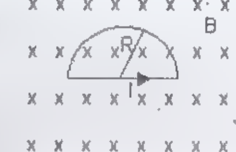
a)¿Cuál es la intensidad, direccion y sentido de la fuerza magnética sobre la barra?

b) ¿Cuál es la aceleración de la barra?

Considere que existe rozamiento, el coeficiente de rozamiento por deslizamiento $\mu = 0.45$, de acuerdo a la superficie que está en contacto.

PROBLEMA 15

Un alambre recto de 10 g y 5 cm se suspende con dos resortes idénticos de tal manera que forman el circuito mostrado en la figura. La resistencia del mismo es de 12 ohm. Los resortes está alargados debido al peso en 0.5 cm. ¿Cuál es la magnitud y sentido del campo magnético que se requiere para eliminar el alargamiento de los resortes?

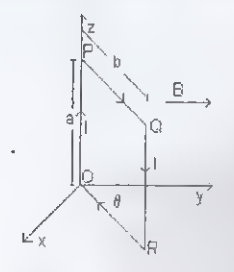


PROBLEMA 16

Determine la fuerza de origen magnético en la espira semicircular de la figura.

PROBLEMA 17

Una espira rectangular conductora de lados a y b, que transporta una corriente I, como muestra la figura está colocada en un campo de inducción magnética uniforme B paralelo al eje y Determinar a) La fuerza sobre cada lado de la espira. b) El momento de fuerza respecto al eje z.

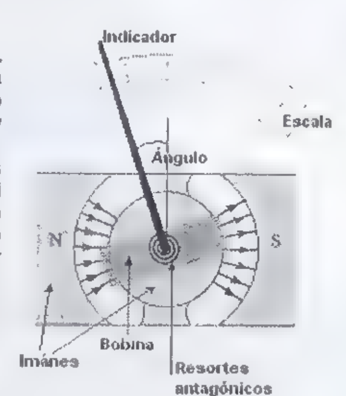


PROBLEMA 18

Un enrollamiento circular de radio R y N vueltas por el que circula una corriente i, está en un campo de inducción magnética constante B ¿qué cantidad de trabajo se requiere para cambiar de la orientación donde forma un ángulo 0° respecto del campo hasta otra en la cual forma un ángulo igual a 180°? N = 500, R = 7 cm, i = 1 A y B = 0.7 T

PROBLEMA 19

Una espira cuadrada de lado L =1 cm está colocada en una región donde existe un campo magnético uniforme B = 0.8 T y transporta una corriente de 1 A. a) Calcular las fuerzas magnéticas sobre cada lado si la normal de la espira forma un ángulo de 30° con la dirección del campo. b) Encontrar el par que experimenta la espira indicando su orientación. c) ¿cuál es el valor del momento dipolar magnético?.



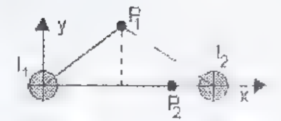
PROBLEMA 20

Un galvanómetro –de bobina movil- de D´Arsonval está mostrado en la figura. Cuando por las espiras de alambre que constituyen la bobina circula una corriente, el campo de inducción magnética creado por el imán ejerce sobre la bobina un par de fuerza que hace rotar la bobina en contra de los resortes, la bobina está asociada a un indicador sobre la escala Demostrar que el ángulo de deflexión del indicador es directamente proporcional a la corriente en la bobina.

CAMPO MAGNETICO. PROPIEDADES

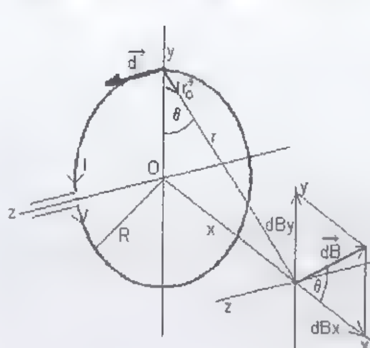
PROBLEMA 1

Calcule el campo de inducción magnética debido a la corriente que pasa por un hilo rectilíneo muy largo



PROBLEMA 2

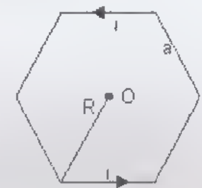
Dos conductores filiformes paralelos separados una distancia d = 2 cm conducen corriente es iguales i =1 A en el mismo sentido. Determine el campo B para los puntos $P_1(1, 1)$ y $P_2(1.5, 0)$, medidos en cm.



PROBLEMA 3

Un segmento de alambre de longitud a transmite una corriente i. Demuestre que el campo B asociado con el segmento, a una distancia R del segmento, sobre un plano bisector perpendicular, tiene la magnitud dada por:

$$B = \frac{\mu_o \cdot i}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{a}{R \cdot \sqrt{4 \cdot R^2 + a^2}}$$



PROBLEMA 4

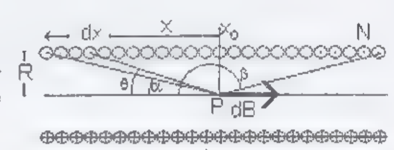
Dada una espira en forma de hexágono por la que circula una corriente i. Calcular el campo B en el centro de la misma.

PROBLEMA 5

Una espira circular de alambre de radio R que lleva una corriente I, como la que muestra la figura. Calcúlese el campo de inducción magnética en un punto sobre el eje a una distancia x del centro de la espira.

PROBLEMA 6

Calcular el campo de inducción magnética debido a un solenoide. Un solenoide puede describirse como un arrollamiento uniforme de N vueltas de un hilo conductor aislado, en forma cilíndrica de radio R, longitud L, como se muestra en la figura

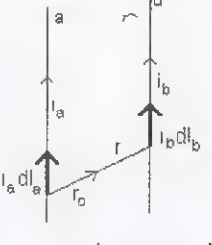


PROBLEMA 7

Encuentre la expresión de la fuerza de interacción entre dos elementos de corrientes, por simplicidad supóngalos paralelos.

Analice la orientación de la fuerza si las corrientes tienen igual sentido o sentido contrario.

Compare la expresión de la fuerza de interacción obtenida con la expresión de la ley de Coulomb y establezca la similitud y diferencia.



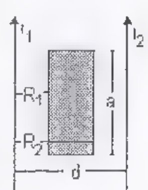
PROBLEMA 8

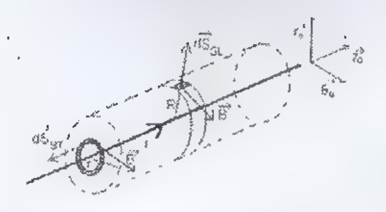
Dos conductores rectilíneos muy largos están separados 2 cm. La corriente que lleva cada uno es i_a = 5 A, i_b =10 A y tienen el mismo sentido. Calcular la fuerza por unidad de longitud entre ellos.

PROBLEMA 9

Dos conductores rectilíneos muy largos están separados 15 cm. La corriente que lleva cada una es i_1 = 5 A, i_2 = 10 A. Calcular. a) El campo de inducción magnética en un punto situado en el plano de ambos conductores y a igual distancia de ellos.

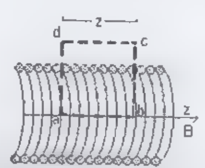
b) El flujo que atraviesa el área sombreada, sabiendo que cada lado del rectángulo dista 5 cm del conductor más próximo, tiene un ancho de 5 cm y 20 cm largo.





PROBLEMA 10
Calcular el flujo del campo magnético creado por un alambre que conduce una corriente i muy largo a través de una superficie cilíndrica de radio R, coaxial con el hilo.

PROBLEMA 11
En la figura se muestran cuatro trayectorias cerradas. Determinar en cada una de ellas el valor de la circulación del campo $\vec{B}$ a lo largo de cada una de ellas.

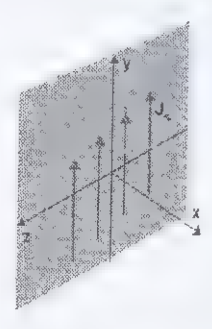


PROBLEMA 12
Empleando la ley de Ampere calcule la intensidad del campo magnético en el eje de un solenoide muy largo

PROBLEMA 13
Por un conductor cilíndrico macizo, de radio R = 1 mm, circula una densidad de corriente J=C.r (A/m²) con 0< r < R. Determinar a) el valor y las unidades de la constante C si la corriente total que transporta el conductor es 0,3A. b) el campo de inducción magnética en el interior y el exterior del conductor

PROBLEMA 14
Un cable coaxial está formado por un conductor cilíndrico macizo de radio R_1 rodeado de un cilindro conductor coaxial de radio interno R_2 y radio externo R_3. Por el cilindro interno circula una corriente i que regresa por el conductor externo. Determinar el campo de inducción magnética para : $r < R_1$; $R_1 < r < R_2$; $R_2 < r < R_3$ y $r > R_3$.



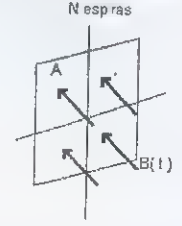


PROBLEMA 15
Un conductor cilíndrico hueco de radio interno R_1 y radio externo R_2, circula una corriente i. Determinar el campo de inducción magnética para : $r < R_1$; $R_1 < r < R_2$ y $r > R_2$.

PROBLEMA 16
Una placa infinita colocada en el plano yz conduce una densidad corriente superficial J_s constante, a lo largo del eje y. Determine el campo de inducción magnética en puntos cercanos a la placa. La densidad corriente superficial J_s representa laa corriente por unidad de longitud medida a lo largo del eje z.

LEY DE FARADAY. INDUCTANCIA

PROBLEMA 1
a)Una espira de 3 vueltas y área 0,5 m^2 situada en el aire, donde existe un campo de inducción magnética uniforme normal al plano de la espira; si la densidad de flujo magnético cambia 5 mT /s. ¿Cuál es la fuerza electromotriz inducida que aparece entre los terminales de la espira? b) Si la fem entre los terminales de la espira es 100 mV ¿Cuál es la velocidad de cambio del campo magnético?



PROBLEMA 2

¿Cuántas espiras (ver figura) son requeridas de una espira cuadrada de 100 mm de lado, para desarrollar una fem máxima de 10 mV, si la espira rota a 30 vueltas/s en el campo magnético terrestre. $B_t = 60\ \mu T$

PROBLEMA 3

Un campo uniforme B de 100 mT se extiende sobre un área cuadrada de 100 mm de lado, como muestra la figura; con un campo cero fuera de esa zona. Una espira de alambre, rectangular 40 por 80 mm se mueve en el campo con velocidad 100 mm/s. Hallar la fem. inducida en la espira y graficar los resultados en un gráfico $\phi(t)$ y $e(t)$ para el intervalo correspondiente.

100mm

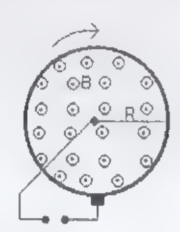
80mm

40mm

N espiras

PROBLEMA 4

Una espira de alambre de 5 vueltas de 0,5 m^2 de área gira con una frecuencia de 20Hz. Si en la espira se desarrolla una fem de 100 mV cuando está orientada para respuesta máxima, hallar la amplitud del campo magnético.



PROBLEMA 5

Un disco con aro conductor y rayo simple rota perpendicular a un campo magnético uniforme B según la figura. El campo magnético esta confinado a un radio R de las piezas polares de un imán. Un circuito externo hace contacto con el eje y el aro a través de escobillas. Si el disco rota con f rev. / seg., Hallar la fem inducida en el circuito.

PROBLEMA 6

Un conductor de longitud a y masa m puede deslizarse por un par de guías metálicas conectadas a una resistencia R, como muestra la figura 1. La fricción y la resistencia del conductor y de las guías son despreciables. Hay un campo magnético uniforme y horizontal de intensidad B normal al plano del dibujo y dirigida hacia fuera.

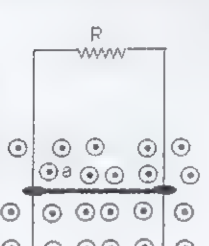
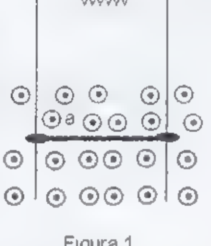
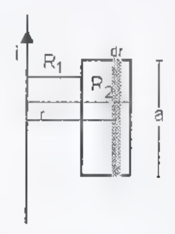



Figura 1

Calcule la velocidad estacionaria final de caída bajo la acción gravitatoria

PROBLEMA 7

Calcule la inducción mutua entre la espira rectangular y el alambre recto de gran longitud, como se muestra en la figura

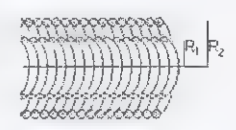


PROBLEMA 8

Calcule el coeficiente de autoinducción de un solenoide de radio R = 1 cm, de longitud Z_0 =0.2 m y con N =1000 espiras.

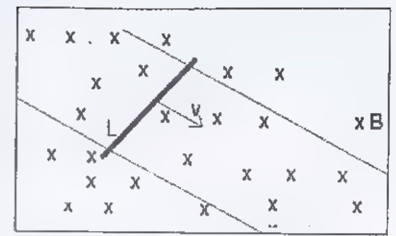
PROBLEMA 9

Dos solenoides coaxiales de radios R1 =1 cm y R2 = 1.5 cm y longitud Z_0 = 30 cm con densidades de enrollamiento n_1 = 7000 vueltas por metro y n_2 = 4000 vueltas por metro Determine a) la inducción mutua M_{12} y la fem inducida en el solenoide 2, cuando circula una corriente $i_1(t) = 2\cos(100\ \pi\ t)$ por el solenoide 1.



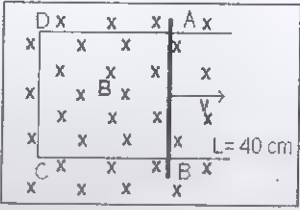
PROBLEMA 10

Una varilla de longitud L se mueve con velocidad v en. dirección perpendicular a su eje y a un campo de inducción magnética B constante como se indica en la figura. a) Escribir la expresión y graficar la dirección de la fuerza que actúa sobre las cargas de la varilla como consecuencia del movimiento de la misma. b) Indicar magnitud y dirección del vector campo eléctrico E debido a la redistribución de cargas que el movimiento origina. c) Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla ? d) Calcular la fem inducida por el movimiento según la ley de Faraday y comparar el resultado con el obtenido en el punto c).



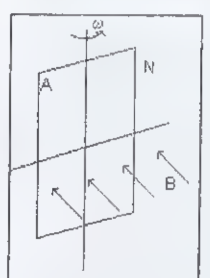
PROBLEMA 11

La barra conductora AB de longitud L de la figura hace contacto con las guías metálicas AD y BC. a) El sistema se encuentra en. un campo magnético uniforme de densidad de flujo 450 mwb/m^2 , perpendicular a la figura. Calcular la magnitud y sentido dè la fem inducida en la barra, cuando se mueve hacia la derecha con una velocidad de 5 m/seg. b) Idem al item a) para un campo magnético uniforme de densidad de flujo 500 mwb/m^2 saliente al plano de la gráfica y v = 5 m/s en el mismo sentido que en el Item a) c) Idem a los puntos a y b) pero, para una velocidad de 4 m/s y de sentido opuesto al seguido en los items anteriores, es decir, para un campo magnético entrante al plano de la gráfica y para otro saliente.



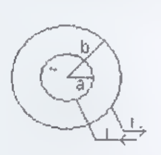
PROBLEMA 12

Un hilo conductor de longitud infinita lleva una corriente de $i(t) = I_o \operatorname{sen}(2\pi f t)$. En la espira rectangular de la figura, encontrar la corriente I(t) si la misma ofrece una resistencia R. Datos: Io = 10 A, f = 20/seg., R = 3 Ohm, a = 2 cm b =12 cm L = 30 cm.



PROBLEMA 13

Una espira de alambre de 5 vueltas de 0,5 m^2 de área gira con una frecuencia de 20 Hz. Si en la espira se desarrolla una fem de 100 mV cuando está orientada para respuesta máxima, hallar la amplitud del campo magnético.

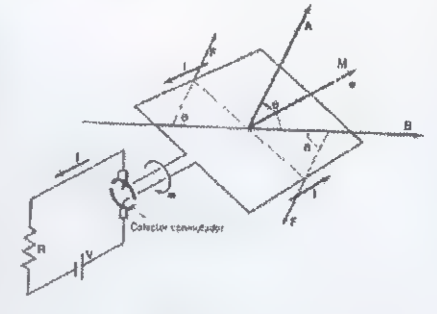


PROBLEMA 14

Cálculo del coeficiente de autoinducción de un solenoide de radio R_1, longitud *l* y N_1 espiras. Cuando circula una corriente i calcule la energía almacenada en el campo magnético.

PROBLEMA 15

Cálculo del coeficiente de autoinducción de un cable coaxial, que consiste en dos cascarones cilíndricos conductores perfectos de radios a y b y longitud l, como muestra la figura. Cuando circula una corriente i calcule la energía almacenada en el campo magnético.



PROBLEMA 16

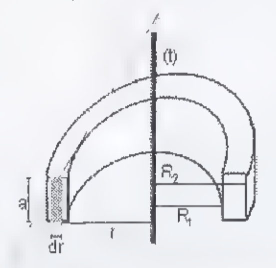
En un motor de CC, como el de la figura, está diseñado de modo que la cupla M permanece constante cuando gira el panel de espiras con M = N·A·B·I donde N es el número de espira, B el campo de inducción magnética, A el área de las espiras e I la corriente en el circuito. Si la fem de la batería es V y la resistencia del circuito del motor es R hallar la velocidad angular del motor

PROBLEMA 17

Una espira circular de área A está situada inicialmente en el plano yz con su centro coincidiendo con el origen. Se hace girar con velocidad angular ω_0 alrededor del eje y, en esa región del espacio existe un campo en la dirección x dado por $B_x = B_0$ sen $(\omega_0 t)$. ¿Cuál es la frecuencia de la fem inducida en la espira?

PROBLEMA 18

Un hilo conductor recto que transporta una intensidad de corriente $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ pasa por el centro de un toroide de N espiras, de radio interior $\underline{R_1}$ y exterior $\underline{R_2}$ y altura $\underline{a}$, como muestra la figura. Calcular el coeficiente de inducción mutua y la fem inducida en el toroide



MAGNETISMO EN MEDIOS MATERIALES

PROBLEMA 1

Sobre una muestra toroidal de un material cuya susceptibilidad magnética es de 4.10^{-2}, se han devanado 4000 espiras por la que circula una corriente de 3 A. El toroide tiene 15 cm de longitud a) Calcular la densidad de corriente solenoidal. b) Determinar el campo H producido por la corriente. c) Calcular la permeabilidad magnética del material. d) Calcular la magnetización M producida en el material. e) Calcular el campo B resultante tanto de la corriente como de la magnetización del material.

PROBLEMA 2

La aguja de una brújula con la forma de una varilla delgada de 0.04 m de longitud experimenta un par máximo de 10^{-8} N m en un campo de inducción magnética $B = 10^{-4}$ T.

si la sección recta de la varilla tiene un área de 0.0314 cm^2 ¿Cuál es la imanación M (suponer uniforme) de la aguja?.

b) ¿Cuál es la corriente superficial de Ampere total?.

PROBLEMA 3

Un anillo de Rowland, hecho de hierro, cuya longitud de la circunferencia media es de 30 cm y cuya sección es de 1 cm^2 está enrollado uniformemente con 300 espiras de hilo conductor. Las medidas efectuadas demuestran que cuando la corriente en el enrollamiento es de 32 mA el flujo magnético en el anillo es de 2×10^{-6} Wb. Calcúlese a) B en el anillo. b) El vector H. c) La magnetización. d) La permeabilidad del hierro. e) La susceptibilidad.

PROBLEMA 4

¿Cuáles son los campos B, H y M y las corrientes de magnetización para un cilindro muy largo de radio *R* y permeabilidad μ, limitado por aire, y por el que circula una corriente axial Io uniformemente distribuida?

PROBLEMA 5

Una partícula de masa m y carga q realiza un movimiento circular uniforme. Demuestre que el momento magnético $\vec{\mu}_m$ es proporcional al momento cinético.

PROBLEMA 6

Una varilla imanada de longitud 2 cm, sección 1mm^2 y magnetización M = 1 A / m se coloca en una región donde existe un campo B = 1 T con el que forma un ángulo de 30° como muestra la figura, calcular el par sobre la varilla.

PROBLEMA 7

La tabla da medidas experimentales de la susceptibilidad magnética del alumbre de amonio de hierro. Hacer un gráfico de $1/\square_m$ en función de la temperatura absoluta y determinar si vale la ley de Curie. En caso afirmativo cuál es la

t (°C)	$\chi_m(10^{-4})$
-250	75.4
-173	11.3
-73	5.65
27	3.77

constante de Curie?.

PROBLEMA 8

Las tablas relacionan los valores de B y H para una muestra de acero al silicio laminado en caliente, material que se emplea con frecuencia en los núcleos de los transformadores. a) Constrúyase la gráfica de B y µ en función de H para un intervalo de H = 0 a 1000 Amp.vueltas/m . b) Cuál es la permeabilidad máxima?. c) Cuál es la permeabilidad inicial (H= 0) ?. d) Cuál es la permeabilidad cuando H= 800.000 Amp.vueltas/m ?.

H (A –vueltas)	B (Wb/m²)
0	0
10	0.050
20	0.15
40	0.43
50	0.54
60	0.62
80	0.74
100	0.83
150	0.98

H (A –vueltas)	B (Wb/m²)
200	1.07
500	1.27
1000	1.34
10000	1.65
100000	2.02
800000	2.92

PROBLEMA 9

Calcular el cambio de momento dipolar magnético que sufre un electrón circulante si obra un campo magnético de inducción B = 2 Wb/m² perpendicular al plano de la órbita Radio de la orbita $r = 5{,}1.10^{-11}$m

PROBLEMA 10

Dos bobinas de N1 y N2 vueltas devanadas rígidamente sobre un núcleo de alta permeabilidad de modo que todo el flujo de una bobina enlace a la otra. Este dispositivo constituye un transformador ideal, suponer que la potencia en la bobina 1 es igual a la potencia en la bobina 2. Encontrar las relaciones entre las fuerzas electromotrices y corrientes.

PROBLEMA 11

La permeabilidad magnética relativa del aluminio es 1,00002. Calcúlese la permeabilidad y la susceptibilidad magnética.

PROBLEMA 12

La susceptibilidad magnética del cobre $\chi_m = -0.98\times10^{-5}$ a temperatura ambiente. Calcúlese la permeabilidad y la permeabilidad relativa

PROBLEMA 13

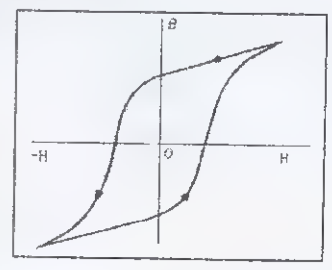
La susceptibilidad de un compuesto cuyo peso molecular es 400 y cuya densidad es $2\ 10^3$ kg m^{-3} está dada por la fórmula

$$\chi_m = \frac{7.3.10^{-2}}{T}$$

donde T es la temperatura absoluta. Calcular el momento dipolar permanente asociado con cada molécula.

PROBLEMA 14

La figura muestra una curva típica de histéresis de un material ferromagnético.
Identifique en la curva la retentividad o remanencia del material
Identifique en la curva coercitividad del material.
¿Qué interpretación física tiene el área delimitada por la curva?



PROBLEMA 15

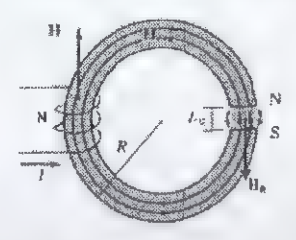
Un enrollamiento toroidal donde circula una corriente estable de 4 A se llena con una sustancia magnética. El enrollamiento tiene 3000 vueltas y un radio medio 3,5 cm y una sección de 1.4 cm². El flujo magnético total medido a través de la sección transversal del toroide es 4×10^{-5} Wb, y se supone constante a) ¿Cuál es la intensidad del campo magnético H en el interior del núcleo? b)

Determine la permeabilidad del material del núcleo

PROBLEMA 16

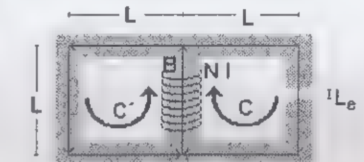
El núcleo de una bobina circular de hierro colado con radios interno 5 cm y externo 7 cm, de sección circular de radio 2 cm, está bobinado con 100 vueltas. Calcule, aproximadamente, el flujo magnético concatenado si la corriente que circula es de 2.83 A. La tabla de la derecha da la curva B-H del material en la región de trabajo.

H(A/m)	B(T)
250	0.14
500	0.24
750	0.34
1000	0.40
1250	046



PROBLEMA 17

En un anillo de Rowland de radio medio R con un entrehierro de aire de longitud L_e pequeña comparada con el grosor de la bobina. Suponer que no hay pérdida de flujo magnético y el campo es aproximadamente uniforme en su interior. Suponer además que la bobina está concentrada tiene N espiras y circula una corriente I. Determinar el flujo total.



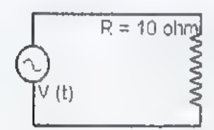
PROBLEMA 18

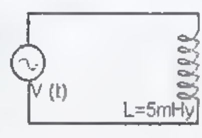
Consideremos un circuito magnético como el indicado en la figura . Todas las secciones miden A y el núcleo tiene una permeabilidad $\mu >> \mu_0$ La longitud del entre hierro es $L_e << L$. Plantee las ecuaciones del circuito.

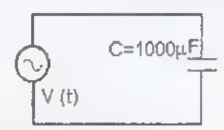
CORRIENTE ALTERNA

PROBLEMA 1

En los circuitos de abajo se emplea la misma fuente V(t) = Vo cos (2 π f t), donde Vo =20 V y f = 50 Hz. Determine, en cada caso, la corriente del circuito y haga una representación gráfica de V(t) e i(t) y analice el desfasaje entre ellas.







PROBLEMA 2

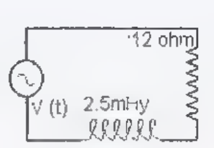
Calcule el valor eficaz de las siguientes corrientes periódicas:

a) $I(t) = I_o \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} + \varphi\right)$ b) $I(t) = K \cdot t, \quad K = Cte \quad 0 \le t \le T$

c) $I(t) = \begin{cases} I_o & 0 \le t \le T/2 \\ -I_o & T/2 \le t \le T \end{cases}$

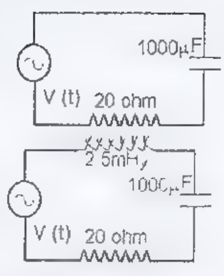
PROBLEMA 3

Determine la corriente eficaz del circuito y diferencia de potencial sobre cada elemento del circuito, cuando está alimentado por V(t) = 20 cos(2 π f t), con f = 50 Hz.



PROBLEMA 4

Determine la corriente eficaz del circuito y diferencia de potencial sobre los elementos de circuito, cuando está alimentado por $V(t) = 20 \cos(2 \pi . f\, t)$, con f = 50 Hz.

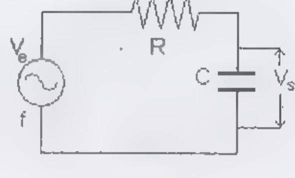


PROBLEMA 5

Para el circuito de la figura calcule: a) Las reactancias inductivas y capacitivas, b) La impedancia, c) La corriente eficaz y su desfasaje con la fem de la fuente, d) La diferencia de potencial sobre cada elemento, e) Las potencias activa y reactiva del circuito, f) La frecuencia de resonancia. La expresión de $V(t) = 20 \cos(2 \pi f\, t)$ medida en voltios con f = 50 Hz.

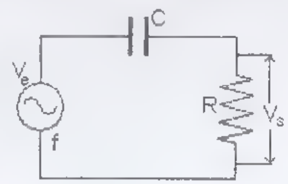
PROBLEMA 6

En un circuito RCL serie, el valor de la resistencia es 20Ω y el de la inductancia 18 mHy, para la frecuencia de 60 Hz, la diferencia de fase entre la corriente y la diferencia de potencial de la fuente es $\varphi = 15^o$. Calcule el valor de la capacidad.



PROBLEMA 7

Estudie la diferencia de fase entre la corriente y la diferencia de potencial de la fuente en función de la frecuencia en un circuito RLC serie, si L = 5 mH, C = 5μF y la resistencia toma los siguientes valores 20Ω, 30Ω y 40Ω. El rango de variación de frecuencia es $0 \leq f \leq 2000$ Hz



PROBLEMA 8

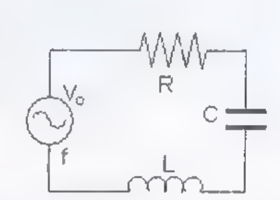
Un circuito filtro simple RC pasa bajo está representado en la figura encuentre la ganancia (V_s / V_e) en función de la frecuencia.

PROBLEMA 9

Un circuito filtro simple RC pasa alto está representado en la figura encuentre la ganancia (V_s / V_e) en función de la frecuencia

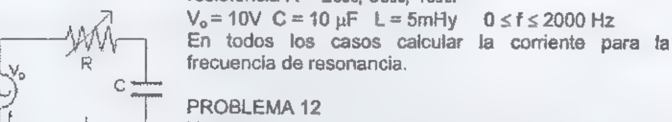
PROBLEMA 10

En un circuito serie RLC se efectuaron las siguientes mediciones de valores eficaces de V_L = 8V, V_C = 4V, e i = 3 A, la fem de la fuente es de 5 V y con una frecuencia de 250 Hz. Determinar los valores de los elementos R, L y C, el valor de la impedancia del circuito y el desfasaje entre la corriente y la ddp correspondiente.



PROBLEMA 11

Haga una representación gráfica de la corriente eficaz en función de la frecuencia para el circuito de la figura. Para los siguientes valores de la resistencia R = 20Ω, 30Ω, 40Ω.

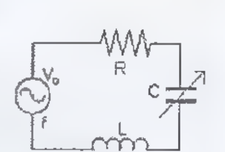


V_o = 10V C = 10 μF L = 5mHy $0 \leq f \leq 2000$ Hz

En todos los casos calcular la corriente para la frecuencia de resonancia.

PROBLEMA 12

Haga una representación gráfica de la corriente eficaz en función de la frecuencia para el circuito de la figura.





Para los siguientes valores del condensador C = 10 μF, 20μF, 30 μF

R = 20Ω V_o = 10V L = 5mHy $0 \leq f \leq 2000$ Hz

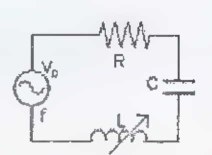
En todos los casos calcular la corriente para la frecuencia de resonancia.

PROBLEMA 13

Haga una representación gráfica de la corriente eficaz en función de la frecuencia para el circuito de la figura. Para los siguientes valores de la inductancia L = 5mHy, 10mHy, 20mHy

R = 20Ω V_o = 10V C = 10 μF $0 \leq f \leq 2000$ Hz

En todos los casos calcular la corriente para la frecuencia de resonancia.



PROBLEMA 14

Para los circuitos de las figuras 1 y 2 determine la impedancia equivalente si Z_1 = (10 + 16 i) ohm y Z_2 = (8 - 4 i) ohm

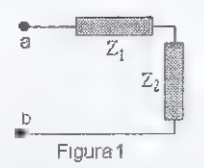


Figura 1

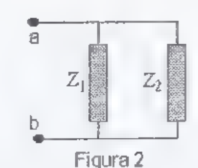
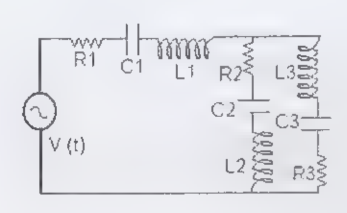


Figura 2

$$Z_1 = [10 + j16]\Omega$$
$$Z_2 = [8 - j4]\Omega$$

PROBLEMA 15



En el circuito de la figura determine la diferencia de potencial sobre el condensador C_3. La fem V(t)=100cos(2 π f t) con f = 50Hz

$f = 50\,Hz \quad R1 = 10\Omega \quad R2 = 15\Omega \quad R3 = 20\Omega$

$L1 = 0.01\,Hy \quad L2 = 0.02\,Hy \quad L3 = 0.015\,Hy$

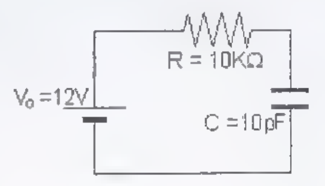
$C1 = 50\,\mu F \quad C2 = 150\mu F \quad C3 = 100\mu F$

ECUACIONES DE MAXWELL: ONDAS ELECTROMAGNETICAS

PROBLEMA 1

La diferencia de potencial eléctrico en un condensador plano de 10 pF, cuyas placas están separadas 1 mm varia con el tiempo según la expresión

$$V(t) = V_o\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$



donde t está en segundos, en el circuito de la figura. Calcule la corriente de desplazamiento como función del tiempo.

PROBLEMA 2

Un condensador de placas planas, de separación L, con placas en forma de disco de radio R con un dieléctrico de permitividad ε está conectado a una fuente V(t) = Vo sen (ωt)

a) Calcule la corriente de desplazamiento.
b) Encuentre las expresiones de los campos eléctricos y magnéticos.
c) Determine el vector de Poynting.

PROBLEMA 3

Un condensador de placas circulares de 5 cm de radio separadas 2 mm se está cargando con una corriente de 1 A. a) Calcule la rapidez del cambio del campo eléctrico entre las placas y la corriente de desplazamiento b) ¿Cuál es el campo magnético entre las placas para un radio de 2 cm del centro.

PROBLEMA 4

A partir de las ecuaciones de Maxwell homogéneas (es decir, con $\rho(\vec{r},t) = 0$ y $\vec{J}(\vec{r},t) = 0$) demuestre que los campos eléctrico y magnético responden a una ecuación de onda.

PROBLEMA 4

Verifique que $c = \sqrt{\dfrac{1}{\mu_o \cdot \varepsilon_o}}$ tiene dimensiones de longitud por unidad de tiempo

PROBLEMA 5

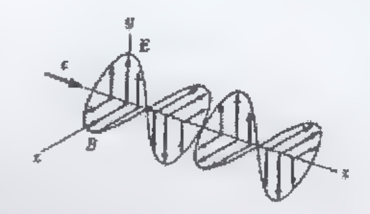
Demostrar que en una región del espacio donde no hay densidades de cargas ni de corrientes eléctricas las ondas electromagnéticas son transversales.

PROBLEMA 6

Una onda electromagnética senoidal de frecuencia 20 Mhz viaja en el vacío en la dirección x, como se muestra en la figura En un punto y en un instante, el campo eléctrico E tiene su valor máximo de 750 N/C y está dirigido a lo largo del eje y Determine la longitud y el período de la onda.

Calcúlese la magnitud y dirección del campo magnético B.

Escríbanse las expresiones para las componentes del campo eléctrico y magnético de la onda plana en términos de las variaciones del tiempo y del espacio.



PROBLEMA 7

Verifique que las siguientes expresiones para E y B son soluciones de la ecuación de onda

a) $E = \dfrac{A}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} e^{a(x-ct)}$ $\qquad B = Ae^{a(x-ct)}$

b) $E = E_m \cos(Kx - \omega t)$ $\qquad B = B_m \cos(Kx - \omega t)$

PROBLEMA 8

Una onda electromagnética plana que se propaga en el vacío tiene una frecuencia de $6{,}4.10^{14}$ Hz y una amplitud de campo eléctrico de 320 N/c. Escriba las ecuaciones que describen los campos eléctricos y magnéticos de estas ondas en su forma

$E(x, t) = E_m \cos(K x - \omega t)$ y $B(x, t) = B_m \cos(K x - \omega t)$.

Dé los valores numéricos de E_m , B_m , K y ω.

PROBLEMA 9

La figura del problema 6 muestra una onda electromagnética plana senoidal que se propaga en el vacío, en la dirección del eje x. La longitud de onda es de 25 m , el campo eléctrico vibra en el plano xy con una amplitud de 20V/m. Calcule a) la frecuencia senoidal b) la amplitud y dirección de B cuando el campo eléctrico tiene su valor máximo en la dirección negativa de y. c) Escriba una expresión para B en la forma $B(x, t) = B_m \cos(K x - \omega t)$, con lo valores numéricos de B_m , K y ω.

PROBLEMA 10

El balance de la energía electromagnética está dado por

$$\frac{dW}{dt} = -\oiint_A \overline{S} \cdot \overline{da} + \int_V \overline{E} \cdot \overline{J_C} \cdot dv \qquad (1)$$

donde W es la energía electromagnética contenida en el volumen V. La integral $\oiint_A \overline{S} \cdot \overline{da}$ representa la energía del campo electromagnético que fluye a través de la superficie A en la unidad de tiempo. La

integral $\int_V \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{J_C} \cdot dv$ es la energía por unidad de tiempo que el campo electromagnético intercambia con las partículas contenidas en el volumen V.

a) Obtenga el balance de energía para una región que está aislada energéticamente.
b) Obtenga el balance de energía para una región que no está aislada energéticamente y no contiene fuentes ni elementos que consuman energía.

PROBLEMA 11
Establezca una relación entre la densidad de energía electromagnética y el vector de Poynting para una onda plana

PROBLEMA 12
El campo eléctrico de una onda electromagnética plana es

$$E_x = 0 \;\; ; \;\; E_y = 0.4 sen\left[\frac{2\pi}{3}(x - ct)\right] \quad ; \quad E_z = 0.3 sen\left[\frac{2\pi}{3}(x - ct)\right]$$

medido en N/C. a) Determinar la amplitud del campo eléctrico y del campo magnético de la onda electromagnética. b) Dibujar un esquema en el que se especifique la dirección de vibración del campo eléctrico, del campo magnético y la dirección y sentido de la propagación de la onda electromagnética. c)Hallar la frecuencia, longitud de onda e intensidad de la onda electromagnética. d) Calcular el vector de Poynting

PROBLEMA 13
El Sol entrega aproximadamente 1000 W/m^2 de flujo electromagnético a la superficie terrestre a) calcúlese la potencia total que incide sobre una azotea cuya dimensiones son 8 m x 20 m. b) Determínese la presión de radiación y la fuerza de la radiación sobre la azotea, suponiendo que su recubrimiento es un absorbente perfecto. c) ¿Cuánta energía solar llega a la azotea en una hora?.

PROBLEMA 14
Un alambre conductor recto de resistividad ρ y de área A conduce una corriente uniforme de intensidad I. Determínese el sentido, la dirección y magnitud del vector de Poynting en la superficie del alambre. Calcule el flujo del vector de Poynting a través de la superficie del alambre y compare este resultado con el calor de Joule producido en este segmento del conductor.

PROBLEMA 15
Dada una onda electromagnética plana en el vacío cuyo campo

$$\vec{E} = 50\times10^{-8} cos\left[4\pi10^{6}\left(z - 3\times10^{8}\, t\right)\right]\vec{j}$$

¿Cuáles son la longitud de onda, la velocidad y la dirección del movimiento de la perturbación?

Hallar una expresión para el campo $\vec{B}(z,t)$.
Hallar el vector de Poynting.

PROBLEMA 16
Una onda electromagnética armónica en el espacio libre se describe por

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_o\, cos\left[K x - \omega t\right]$$

Demostrar que la irradiancia (valor medio del flujo de energía transportado por una onda electromagnética es $I = \dfrac{c\,\varepsilon_o\, E_o^2}{2}$

PROBLEMA 17
Se coloca un detector a 2 m una fuente puntual monocromática de 100 W que radia en el vacío, en forma isotópica, determinar la amplitud del campo E en el detector.

CAPITULO III: LEY DE COULOMB

PROBLEMA 1

Calcule el módulo de la fuerza electrostática que ejerce un cuerpo puntual con carga $Q = 10^{-6}$C sobre otro igual, cuando están distanciados. a) $r_1 = 1$ m, b) $r_2 = 0,5$ m, c) $r_3 = 0,25$ m, d) $r_4 = 0,125$ m. Haga una representación gráfica de la fuerza en función de la distancia entre los cuerpos.

Cuestión: Se debe calcular el módulo de la fuerza electrostática entre dos cuerpos cargados y hacer una representación gráfica de la misma en función de la distancia.

Variables: cargas eléctricas, distancia entre las cargas y módulo de fuerza electrostática.

Datos: $r_1 = 1$ m, $r_2 = 0{,}5$m, $r_3 = 0{,}25$ m, $r_4 = 0{,}125$ m $\quad \varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}$

Marco teórico: Electrostática: ley de Coulomb

Representación o esquema del problema

Se representa a los cuerpos puntuales cargados con un punto, identificados con la letra Q y separados con una distancia r_i, el subíndice indica que la distancia puede tomar valores discretos según los datos del problema. Sobre una de las cargas se dibuja un vector que representa la fuerza electrostática de repulsión identificada con F_i el subíndice indica que puede cambiar su módulo en función de la distancia considerada.

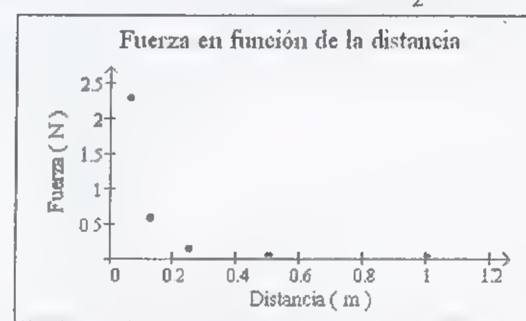


Vinculación con el marco teórico

Para el cálculo del módulo de la fuerza electrostática se debe usar la ley de Coulomb expresada en la forma $F_i = \dfrac{Q^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o \cdot r_i^2}$

Cálculo numérico y construcción gráfica $Q = 10^{-6}$ C con i = 0...3 entonces $r_i = \dfrac{1}{2^i} m$

$r_i[m]$	$F_i[N]$
1	0.009
0.5	0.036
0.25	0.144
0.125	0.575



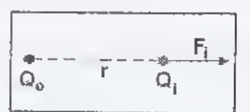
Respuesta

La tabla y el gráfico presentan los valores de los módulos de la fuerza cuando el distancia entre las cargas cambia, claramente se observa el incremento de la fuerza cuando la distancia disminuye

[illegible]

PROBLEMA 2

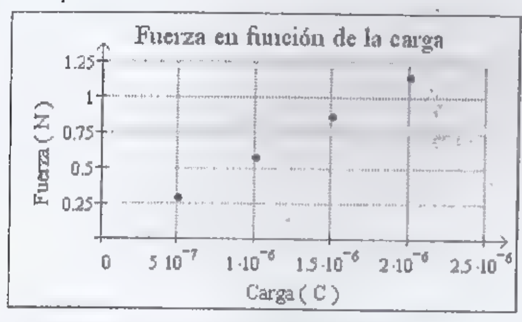
Calcule el módulo de la fuerza electrostática que ejerce un cuerpo puntual con carga $Q_o = 10^{-6}$ C sobre otro que está a una distancia $r = 0{,}125$m, siendo su carga: a) $Q_1 = Q_o/2$, b) $Q_2 = Q_o$, c) $Q_3 = 3Q_o/2$, d) $Q_4 = 2Q_o$. Haga una representación gráfica de la fuerza en función de la carga.

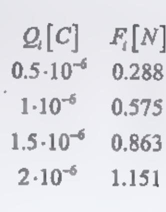


$\varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}$ $\quad Q_o = 10^{-6}$ C $\quad r = 0.125$ m

Cálculo del módulo de la fuerza

$i = 1 \ldots 4$ $\qquad Q_i = i \cdot \dfrac{Q_o}{2}$ $\qquad F_i = \dfrac{Q_o \cdot Q_i}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o \cdot r^2}$





$Q_i[C]$	$F_i[N]$
$0.5 \cdot 10^{-6}$	0.288
$1 \cdot 10^{-6}$	0.575
$1.5 \cdot 10^{-6}$	0.863
$2 \cdot 10^{-6}$	1.151

Claramente se observa la dependencia lineal

¿Si Q_o se duplica cómo se modifica la gráfica?

PROBLEMA 3

Encuentre la fuerza (el módulo y la orientación) sobre el cuerpo puntual con carga q_o ubicado en las coordenadas (x_o, y_o) debido al cuerpo puntual con carga Q colocado en (x, y).

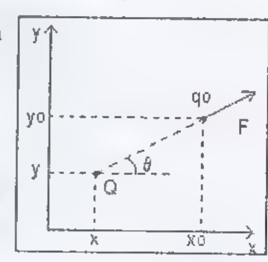
Cuestión: Debe encontrarse la fuerza electrostática (en forma vectorial) entre dos cuerpos puntuales cargados.

Variables: Cargas eléctricas, coordenadas x, y de las cargas, fuerza electrostática.

Restricciones: los cuerpos cargados debe ubicarse en un sistema de coordenados x, y.

Datos: son genéricos, un cuerpo puntual con carga q_o en la posición (xo, yo) y otro cuerpo puntual con carga Q en la posición (x, y).

Marco teórico: Electrostática: ley de Coulomb



Representación o esquema del problema

Se dibuja un sistema de coordenados x, y. Se representa a los cuerpos puntuales cargados con un punto, identificados con la letra Q y q_o en las coordenadas (x, y) y (xo, yo) respectivamente. Sobre el cuerpo con q_o se dibuja un vector que representa la fuerza electrostática de repulsión identificada con F que forma un ángulo θ con el eje horizontal.

Vinculación con el marco teórico

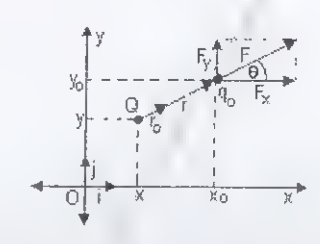
Para el cálculo de la fuerza electrostática se debe usar la ley de Coulomb expresada en la forma

$$\vec{F} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \frac{Q \cdot q_o}{r^2} \vec{r_o} \quad (1)$$

Cálculo y construcción gráfica

Considerando la distancia entre los cuerpos cargados como

$$r^2 = (x_o - x)^2 + (y_o - y)^2$$



Y la definición del versor como

$$\vec{r_o} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(x_o - x)\vec{i} + (y_o - y)\vec{j}}{\sqrt{(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2}}$$

Reemplazando entonces en (1)

$$\vec{F} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \frac{Q \cdot q_o}{r^2} \vec{r_o} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \frac{Q \cdot q_o}{\left[(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2\right]} \frac{(x_o - x)\vec{i} + (y_o - y)\vec{j}}{\sqrt{(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2}}$$

Las componentes de la fuerza son

$$F_x = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \frac{Q \cdot q_o \cdot (x_o - x)}{\left[(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2\right]^{3/2}} \qquad F_y = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \frac{Q \cdot q_o \cdot (y_o - y)}{\left[(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2\right]^{3/2}}$$

El módulo de la fuerza y el ángulo respecto de la horizontal

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2) \qquad \theta = a\tan\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = a\tan\left(\frac{y_o - y}{x_o - x}\right) \quad (3)$$

Respuesta
El módulo de la fuerza se expresa en (2) y su orientación en (3).

Encuentre las componentes de la fuerza sobre Q debido a qo.

PROBLEMA 4

Calcule la fuerza electrostática sobre el cuerpo puntual con carga Q_0 debido a la presencia de tres cuerpos puntuales con cargas Q_1, Q_2 y Q_3 respectivamente como muestran las figuras a, b y c.
Datos: Q_0= 1C, Q_1 = -2 C, Q_2 = 2 C, Q_3 = 1 C L = 1m.

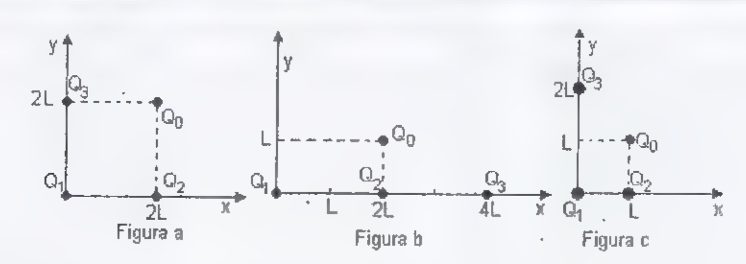


Figura a Figura b Figura c

Cuestión: Debe encontrarse la fuerza electrostática (en forma vectorial) sobre un cuerpo puntual cargado debido a la presencia de otros cuerpos puntuales cargados

Variables: Cargas eléctricas, coordenadas x, y de las cargas, fuerza electrostática.

Restricciones: los cuerpos puntuales cargados en el plano x, y

Datos de la figura a:

Q_0= 1C, Q_1 = -2 C, Q_2 = 2 C, Q_3 = 1 C L = 1m

$$\varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

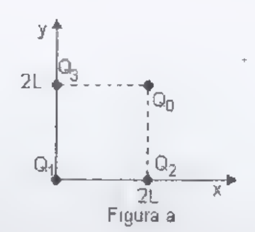


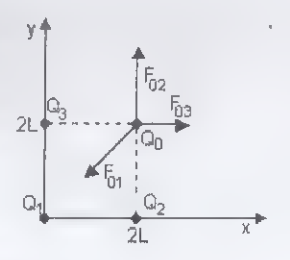
Figura a

Carga Q_0	Q_o= 1 C	x_o = 2 m	y_o = 2 m
Carga Q_1	Q_1= - 2 C	x_1 = 0 m	y_1 = 0 m
Carga Q_2	Q_2= 2 C	x_2 = 2 m	y_2 = 0 m
Carga Q_3	Q_3= 1 C	x_3 = 0 m	y_3 = 2 m

Marco teórico: Electrostática: ley de Coulomb

Representación o esquema del problema

Se dibuja un sistema de coordenados x, y Se representa a los cuerpos puntuales cargados con un punto, identificados con la letra Q_o, Q_1, Q_2 y Q_3 en las coordenadas correspondientes. Sobre el cuerpo con Q_o se dibujan tres vectores que representan las fuerzas electrostáticas que actúan sobre el, identificadas con F_{01}, F_{02} y F_{03}, la longitud de los vectores no está a escala.



Marco teórico

Como la fuerza electrostática sobre Q_o es debido a la interacción con tres cuerpos cargados se debe usar el principio de superposición entonces la ley de Coulomb se expresa en la forma

$$\vec{F}_o = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \left[\frac{Q_o \cdot Q_1}{r_{01}^2} \vec{r}_{o_{01}} + \frac{Q_o \cdot Q_2}{r_{02}^2} \vec{r}_{o_{02}} + \frac{Q_o \cdot Q_3}{r_{03}^2} \vec{r}_{o_{03}} \right] = \frac{Q_o}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{n=1}^{N=3} \frac{Q_o \cdot Q_n}{r_{0n}^2} \vec{r}_{o_{0n}}$$

Si expresamos la fuerza en términos de sus componentes, empleando los cosenos directores

$$F_x = \frac{Q_o}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{n=1}^{N=3} \frac{Q_n}{r_{0n}^2} \cos(\alpha_n) \quad \text{con} \quad r_{0n} = \sqrt{(x_0 - x_n)^2 + (y_0 - y_n)^2} \quad \cos(\alpha_n) = \frac{(x_0 - x_n)}{r_{0n}}$$

$$F_y = \frac{Q_o}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{n=1}^{N=3} \frac{Q_n}{r_{0n}^2} \cos(\beta_n) \quad \text{con} \quad \cos(\beta_n) = \frac{(y_0 - y_n)}{r_{0n}}$$

Cálculo numérico Cálculo de las componentes

$$F_x = \frac{Q_o}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{n=1}^{N=3} \frac{Q_n}{r_{0n}^2} \cos(\alpha_n) = 6.584 \cdot 10^8\, N$$

$$F_y = \frac{Q_o}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{n=1}^{N=3} \frac{Q_n}{r_{0n}^2} \cos(\beta_n) = 2.906 \cdot 10^9\, N$$

Cálculo del módulo y orientación $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2.98 \cdot 10^9\, N$ $\qquad \theta = \frac{180}{\pi} \cdot atan\left[\frac{F_y}{F_x}\right] = 77.23^\circ$

Respuesta Figura a

La fuerza tiene modulo F = $2.98 \cdot 10^9$ N y forma con el eje horizontal 77.23° (está en el primer cuadrante).

Datos Figura b

Carga Q_0	$Q_0 = 1C$	$x_0 = 2$ m	$y_0 = 2$ m
Carga Q_1	$Q_1 = -2C$	$x_1 = 0$ m	$y_1 = 0$ m
Carga Q_2	$Q_2 = 2$ C	$x_2 = 2$ m	$y_2 = 0$ m
Carga Q_3	$Q_3 = 1C$	$x_3 = 4$ m	$y_3 = 0$ m

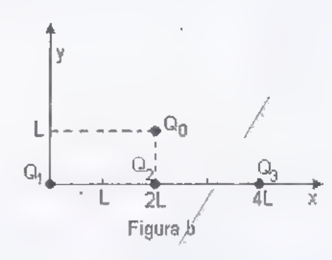
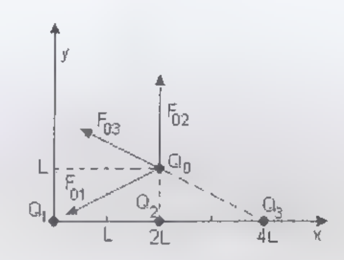


Figura b

Cálculo de las componentes de la fuerza

$$F_x = \frac{Q_o}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\sum_{n=1}^{N=3}\frac{Q_n}{r_{0n}^{2}}\cos(\alpha_n) = -2.384\cdot 10^9\,N$$

$$F_y = \frac{Q_o}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\sum_{n=1}^{N=3}\frac{Q_n}{r_{0n}^{2}}\cos(\beta_n) = 3.701\cdot 10^9\,N$$



Cálculo del módulo y orientación

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} = 4.403\cdot 10^9\,N$$

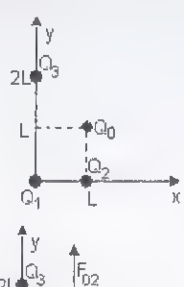
$$\theta = \frac{180}{\pi}\cdot atan\left[\frac{F_y}{F_x}\right] = -57.21^{\circ}$$

Respuesta Figura b

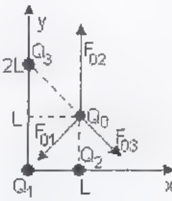
La fuerza tiene modulo F = $4.403\cdot 10^9$ N y forma con el eje horizontal –57.21°, como la componente de la fuerza en x es negativa y la componente en y es positiva la fuerza está en el segundo cuadrante.

Datos Figura c

Carga Q_0	$Q_0 = 1C$	$x_0 = 1$ m	$y_0 = 1$ m
Carga Q_1	$Q_1 = -2C$	$x_1 = 0$ m	$y_1 = 0$ m
Carga Q_2	$Q_2 = 2$ C	$x_2 = 1$ m	$y_2 = 0$ m
Carga Q_3	$Q_3 = 1C$	$x_3 = 0$ m	$y_3 = 2$ m



Cálculo de las componentes de la fuerza



$$F_x = \frac{Q_o}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\sum_{n=1}^{N=3}\frac{Q_n}{r_{0n}^{2}}\cos(\alpha_n) = -3.179\cdot 10^9\,N$$

$$F_y = \frac{Q_o}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\sum_{n=1}^{N=3}\frac{Q_n}{r_{0n}^{2}}\cos(\beta_n) = 8.446\cdot 10^9\,N$$

Cálculo del módulo y orientación $F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} = 9.025\cdot 10^9\,N$ $\quad \theta = \frac{180}{\pi}\cdot atan\left[\frac{F_y}{F_x}\right] = -69.374^{\circ}$

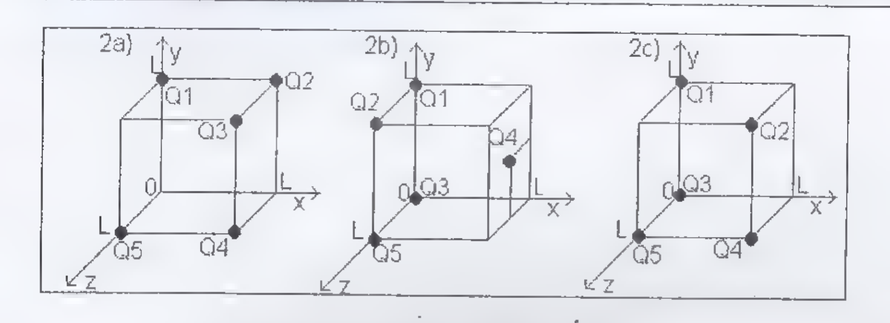
Respuesta Figura c

La fuerza tiene modulo F = $9.025\cdot 10^9$ N y forma con el eje horizontal –69.37°, como la componente de la fuerza en x es negativa y la componente en y es positiva la fuerza está en el segundo cuadrante.

En este ejercicio se calculó la fuerza resultante a partir de las coordenadas de las cargas. ¿existe otro procedimiento?

PROBLEMA 5

Calcule la fuerza electrostática sobre la carga Q_1, según se indica en las figuras 2 a); b) y c). Datos: $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1C$, $Q_4 = Q_5 = 2$ C., L = 0.2 m.



Este problema es semejante al anterior salvo que en las expresiones que deben usarse tienen que incluir la tercera dimensión.

$$\varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \qquad L = 0.2\,m$$

Datos Figura 2a

Carga Q_1	$Q_1 = 1$ C	$x_1 = 0$ m	$y_1 = L$	$z_1 = 0$ m
Carga Q_2	$Q_2 = 1$ C	$x_2 = L$	$y_2 = L$	$z_2 = 0$ m
Carga Q_3	$Q_3 = 1$ C	$x_3 = L$	$y_3 = L$	$z_3 = L$
Carga Q_4	$Q_4 = 2$ C	$x_4 = L$	$y_4 = 0$ m	$z_4 = L$
Carga Q_5	$Q_5 = 2$ C	$x_5 = 0$ m	$y_5 = 0$ m	$z_5 = L$

Cálculo de las distancias entre las cargas Q_n y Q_1

n = 2. .5 $\quad r_{1n} = \sqrt{(x_1 - x_n)^2 + (y_1 - y_n)^2 + (z_1 - z_n)^2}$

Cálculo de los cosenos directores $\cos(\alpha_n) = \frac{(x_1 - x_n)}{r_{1n}}$ $\quad \cos(\beta_n) = \frac{(y_1 - y_n)}{r_{1n}}$ $\quad \cos(\gamma_n) = \frac{(z_1 - z_n)}{r_{1n}}$

Cálculo de las componentes de la fuerza

$$F_x = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{n=2}^{N=5} \frac{Q_n}{r_{1n}^{\ 2}} \cos(\alpha_n) = -3.908 \cdot 10^{11} N$$

$$F_y = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{n=2}^{N=5} \frac{Q_n}{r_{1n}^{\ 2}} \cos(\beta_n) = 2.455 \cdot 10^{11} N$$

$$F_z = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{n=2}^{N=5} \frac{Q_n}{r_{1n}^{\ 2}} \cos(\gamma_n) = 3.25 \cdot 10^{11} N$$

Cálculo del módulo y orientación a partir de los cosenos directores

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 5.644 \cdot 10^{11} N$$

$$A = \frac{180}{\pi} \cdot acos\left[\frac{F_x}{F}\right] = 133.819^o \qquad B = \frac{180}{\pi} \cdot acos\left[\frac{F_y}{F}\right] = 64.22^o$$

$$\Gamma = \frac{180}{\pi} \cdot acos\left[\frac{F_z}{F}\right] = 125.151^o$$

Respuesta figura 2a

El módulo de la fuerza es $5.644 \cdot 10^{11}$ N y los ángulos son 133.819º , 64.22º y 125.151º respecto de los ejes x, y, z respectivamente.

Datos Figura 2b

Carga Q_1	$Q_1 = 1$ C	$x_1 = 0$ m	$y_1 = L$	$z_1 = 0$ m
Carga Q_2	$Q_2 = 1$ C	$x_2 = 0$ m	$y_2 = L$	$z_2 = L$
Carga Q_3	$Q_3 = 1$ C	$x_3 = 0$ m	$y_3 = 0$ m	$z_3 = 0$ m
Carga Q_4	$Q_4 = 2$ C	$x_4 = L$	$y_4 = L/2$	$z_4 = L/2$
Carga Q_5	$Q_5 = 2$ C	$x_5 = 0$ m	$y_5 = 0$ m	$z_5 = L$

Cálculo de las distancias entre las cargas Q_n y Q_1

n = 2...5 $\quad r_{1n} = \sqrt{(x_1 - x_n)^2 + (y_1 - y_n)^2 + (z_1 - z_n)^2}$

Cálculo de los cosenos directores $\cos(\alpha_n) = \frac{(x_1 - x_n)}{r_{1n}} \quad \cos(\beta_n) = \frac{(y_1 - y_n)}{r_{1n}} \quad \cos(\gamma_n) = \frac{(z_1 - z_n)}{r_{1n}}$

Cálculo de las componentes de la fuerza $F_x = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{n=2}^{N=5} \frac{Q_n}{r_{1n}^2} \cos(\alpha_n) = -2.447 \cdot 10^{11} N$

$$F_y = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{n=2}^{N=5} \frac{Q_n}{r_{1n}^2} \cos(\beta_n) = 5.061 \cdot 10^{11} N$$

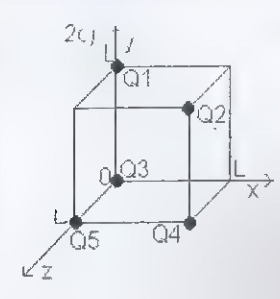
$$F_z = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{n=2}^{N=5} \frac{Q_n}{r_{1n}^2} \cos(\gamma_n) = -5.061 \cdot 10^{11} N$$

Cálculo del módulo y orientación a partir de los cosenos directores

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 7.564 \cdot 10^{11} N$$

$$A = \frac{180}{\pi} \cdot acos\left[\frac{F_x}{F}\right] = 108.876^o \quad B = \frac{180}{\pi} \cdot acos\left[\frac{F_y}{F}\right] = 48.004^o \quad \Gamma = \frac{180}{\pi} \cdot acos\left[\frac{F_z}{F}\right] = 131.996^o$$

Respuesta figura 2b
El módulo de la fuerza es $7.564 \cdot 10^{11}$ N y los ángulos son 108.876° , 48.004° y 131.996° respecto de los ejes x, y, z respectivamente.



Datos Figura 2c

Carga Q_1	$Q_1 = 1$ C	$x_1 = 0$ m	$y_1 = L$	$z_1 = 0$ m
Carga Q_2	$Q_2 = 1$ C	$x_2 = L$	$y_2 = L$	$z_2 = L$
Carga Q_3	$Q_3 = 1$ C	$x_3 = 0$ m	$y_3 = 0$ m	$z_3 = 0$ m
Carga Q_4	$Q_4 = 2$ C	$x_4 = L$	$y_4 = 0$	$z_4 = L$
Carga Q_5	$Q_5 = 2$ C	$x_5 = 0$ m	$y_5 = 0$ m	$z_5 = L$

Cálculo de las distancias entre las cargas Q_n y Q_1

n = 2...5 $\quad r_{1n} = \sqrt{(x_1 - x_n)^2 + (y_1 - y_n)^2 + (z_1 - z_n)^2}$

Cálculo de los cosenos directores $\quad \cos(\alpha_n) = \frac{(x_1 - x_n)}{r_{1n}} \quad \cos(\beta_n) = \frac{(y_1 - y_n)}{r_{1n}} \quad \cos(\gamma_n) = \frac{(z_1 - z_n)}{r_{1n}}$

Cálculo de las componentes de la fuerza $\quad F_x = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{n=2}^{N=5} \frac{Q_n}{r_{1n}^2} \cos(\alpha_n) = -1.66 \cdot 10^{11} N$

$$F_y = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{n=2}^{N=5} \frac{Q_n}{r_{1n}^2} \cos(\beta_n) = 4.703 \cdot 10^{11} N$$

$$F_z = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{n=2}^{N=5} \frac{Q_n}{r_{1n}^2} \cos(\gamma_n) = -3.25 \cdot 10^{11} N$$

Cálculo del módulo y orientación $\quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 5.952 \cdot 10^{11} N$

$$A = \frac{180}{\pi} \cdot acos\left[\frac{F_x}{F}\right] = 106.193^o \quad B = \frac{180}{\pi} \cdot acos\left[\frac{F_y}{F}\right] = 37.809^o \quad \Gamma = \frac{180}{\pi} \cdot acos\left[\frac{F_z}{F}\right] = 123.088^o$$

Respuesta figura 2c
El módulo de la fuerza es $5.952 \cdot 10^{11}$ N y los ángulos son 106.193° , 37.809° y 123.088° respecto de los ejes x, y, z respectivamente.

PROBLEMA 6

Un átomo de hidrógeno está constituido por un núcleo (un protón) y un electrón girando en forma estable en una órbita. Se desea conocer la velocidad del electrón si el radio de la órbita es $0{,}528 \cdot 10^{-8}$ cm. DATOS: $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. y $q_p = -q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Cuestión: ¿Cuál es la velocidad del electrón en una orbita **estable**?

Variables: Cargas eléctricas del protón y electrón, masa del electrón, radio de la orbita y velocidad del electrón.

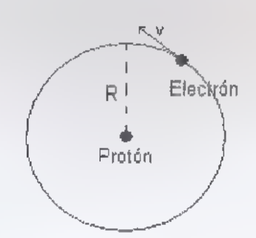
Restricciones: átomo de hidrógeno, orbita estable

Datos: $\varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}$

Carga y masa del electrón $\quad q_e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C \qquad m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\,Kg$

Radio de la órbita del electrón $\quad R = 0.528 \cdot 10^{-10}\,m$

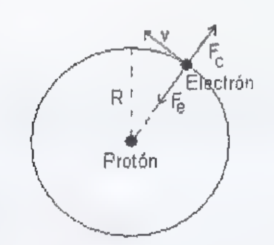
Carga del protón $\quad q_p = q_e$



Representación o esquema del problema
El átomo de hidrógeno se esquematiza mediante una partícula cargada positiva (protón) en el centro de una circunferencia que representa la orbita estable del electrón indicado por un punto.

Marco teórico
La fuerza electrostática sobre el electrón debido al protón es atractiva, y como el electrón está orbitando con velocidad v está presente la fuerza centrífuga. Para que la orbita sea **estable** estas fuerzas deben estar en equilibrio.

a) La ley de Coulomb $\vec{F}_e = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q_e q_p}{R^2}\vec{r}_o$ negativa por el signo de la carga del electrón)



b) La fuerza centrifuga $\vec{F}_c = m \cdot \dfrac{v^2}{R}\vec{r}_o$

$$\vec{F}_c + \vec{F}_e = 0 \quad \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{R}\vec{r}_o - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_e q_p}{R^2}\vec{r}_o = 0$$

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_e q_p}{R^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{q_e \cdot q_p}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o \cdot R \cdot m_e}} = 2.189 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$

Respuesta
La velocidad del electrón es $2\,189 \cdot 10^6$ m/s si el radio de la órbita estable es $0{,}528 \cdot 10^{-10}$ m

¿Qué pasa con la velocidad si en vez de un átomo de hidrógeno es un átomo de deuterio (en el núcleo hay un protón y un neutrón)?

PROBLEMA 7

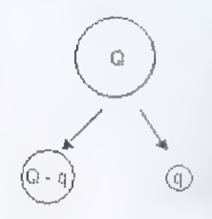
Una cierta carga Q se divide en dos partes +q y Q - q. ¿Cuál es la relación de Q a q si las dos partes separadas una distancia r deben producir una máxima repulsión coulombiana entre sí?

Variables: Cargas eléctricas de los cuerpos resultantes de la división

Restricciones: Carga total Q, distancia r constante, máxima repulsión coulombiana

Datos: $\varepsilon_o = 8.85\cdot 10^{-12}\dfrac{C^2}{N\cdot m^2}$, distancia r constante, Carga total Q.

Representación o esquema del problema

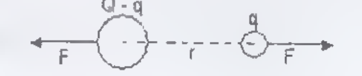


El cuerpo con carga Q se divide en dos uno con carga Q-q y el otro con carga q.

Marco teórico
a) La ley de Coulomb.
b) Análisis de máximo de una función.

La fuerza resultante entre las cargas está dada por

$$F(Q,q,r)=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{q\cdot(Q-q)}{r^2}$$



Si imponemos la condición de máxima repulsión coulombiana entre sí, significa que la primera derivada debe anularse.

$$\frac{d\left[F(Q,q,r)\right]}{dq}=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{Q-2\cdot q}{r^2}=0$$

$$Q-2\cdot q=0 \qquad \Rightarrow \; q=Q/2$$

Respuesta:
La carga Q debe dividirse por la mitad.

PROBLEMA 8

Tres cargas puntuales iguales de Q = 1.10^{-4} C. están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de 20 cm de lado. Calcular la fuerza que actúa sobre cada carga.

Cuestión: Determinar el modulo dirección y sentido de la fuerza que actúa sobre cada carga debido a la presencia de las otras.

Variables: cargas eléctricas, longitud del lado del triangulo equilátero.

Datos

$\varepsilon_o = 8.85\cdot 10^{-12}\dfrac{C^2}{N\cdot m^2}$ $\quad Q=1\cdot 10^{-4}C$ $\quad L=0.2\,m$

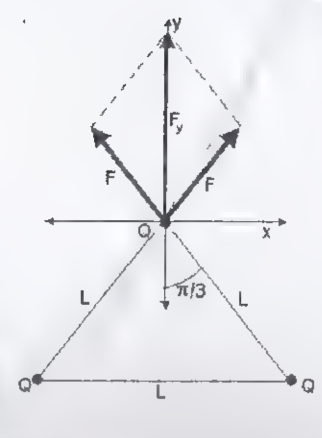
Marco teórico Ley de Coulomb, principio de superposición
Por la simetría del problema, basta calcular la fuerza sobre una de las cargas, del dibujo, solo la componente en la dirección y será distinta de cero.

El módulo de la fuerza entre un par de cargas es

$$F = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{Q\cdot Q}{L^2}$$

El módulo de la fuerza resultante sobre una carga Q es

$$F_y = 2\cdot F\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.248\cdot10^3 N$$



Resultado
El módulo de la fuerza es $2.248\cdot10^3$ N y la dirección a lo largo de la bisectriz, sentido saliente

De lo anterior surge [illegible] distribución de carga original?

PROBLEMA 9

Si la suma de dos cargas puntuales es 5.10^{-5}C. Y la fuerza eléctrica entre ellas cuando están separadas 2 m. es 1 N. ¿Cuál es el valor de cada carga?

Datos $\varepsilon_o = 8.85\cdot10^{-12}\dfrac{C^2}{N\cdot m^2}$ $\quad q_1+q_2 = 5\cdot10^5 C$ $\quad F = 1\cdot N$ $\quad r = 2m$

De acuerdo a las condiciones del problema, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 5\cdot10^{-5} C \\ \\ q_1\cdot q_2 = F\cdot4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot r^2 \end{cases}$$

Este sistema no es lineal, y por lo tanto, resulta

$$q_1^2 - 5\cdot10^{-5}\cdot C\cdot q_1 + F\cdot4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot r^2 = 0$$

Una de sus soluciones es.

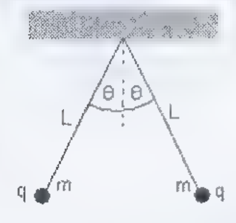
$$\begin{cases} q_1 = 3.842\cdot10^{-5}\cdot C \\ q_2 = 1.158\cdot10^{-5}\cdot C \end{cases}$$

Respuesta: Debido a las condiciones impuestas surge una ecuación de segundo grado en q_1 una de las soluciones es $q_1 = 3.842\cdot10^{-5}$ C y $q_2 = 1.158\cdot10^{-5}$ C

¿Cómo es otra solución? ¿en qué cambia?

PROBLEMA 10

Dos esferas cargadas iguales de dimensiones pequeñas y masa = 1g, se hallan colgadas de un soporte mediante hilos de seda de 30 cm de longitud y penden de un punto en común. Cada hilo forma un ángulo de 5° con la vertical. Calcúlese el valor de las cargas.



Datos

$$L = 0.3\,m \quad \theta = 5 \cdot \frac{\pi}{180}\,rad \quad masa = 0.001 \cdot kg$$

$$g = 9.8\,m/s \qquad \varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Sobre la carga q actúan dos fuerzas:

a) La fuerza eléctrica es de repulsión por ser las cargas del mismo signo y está orientada horizontalmente.
b) El peso de la esfera

La condición de equilibrio se debe cumplir en dos direcciones:

a) a lo largo del hilo entre la tensión del hilo y la resultante de estas fuerzas en esa orientación.
b) a lo largo del eje x (ver figura) perpendicular al hilo de soporte y está dada por las proyecciones de la fuerza eléctrica y el peso.

Esta última condición usaremos para obtener el valor de la carga.

$$F_{ex} = P_x \quad \Rightarrow F_e \cdot \cos(\theta) = P \cdot sen(\theta)$$

$$\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \frac{q^2 \cdot \cos(\theta)}{\left(2 \cdot L \cdot sen(\theta)\right)^2} = masa \cdot g \cdot sen(\theta)$$

despejando la carga q, resulta:

$$q = \sqrt{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o \cdot \left(2 \cdot L \cdot sen(\theta)\right)^2 \cdot masa \cdot g \cdot tg(\theta)} = 1.615 \cdot 10^{-8}\,C$$

Respuesta: el valor de la carga es q = ±1.615 10^{-8} C, los signos de la raíz indican que son cargas de igual signo, ambas positivas o ambas negativas, para que se establezca la repulsión.

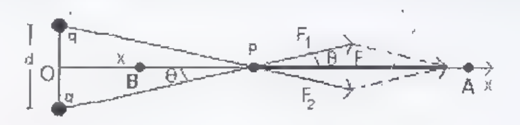
Estudie el cambio en la carga al cambiar a) la longitud del hilo, b) la masa, c) la tensión sobre el hilo

PROBLEMA 11

Dos cargas puntuales idénticas de +q C están separadas por una distancia d (ver figura). Calcular **el trabajo por unidad de carga** necesaria para traer a otra carga +q desde un punto muy alejado (infinito) y sobre el plano bisector de la línea que une las cargas, hasta el punto medio de dicha distancia.



La fuerza en el punto P debido a las dos cargas a una distancia x del centro de las dos cargas está dada por



$$F(x) = F_1 \cdot \cos(\theta) + F_2 \cdot \cos(\theta)$$

$$F(x) = \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \frac{q^2}{\left(x^2 + (d/2)^2\right)} \cos(\theta)$$

$$F(x) = \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \frac{q^2}{\left(x^2 + (d/2)^2\right)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \frac{q^2 x}{\left(x^2 + (d/2)^2\right)^{3/2}}$$

La fuerza para traer la carga desde el punto A hasta el punto B, debe ser de sentido contrario a la anterior y entonces el trabajo será

$$-\int_{x_A}^{x_B} F(x) \cdot dx = \frac{q^2}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \left[\frac{1}{\sqrt{(d/2)^2 + x_B{}^2}} - \frac{1}{\sqrt{(d/2)^2 + x_A{}^2}} \right]$$

Observe que el trabajo depende de las inversas de las distancias DESDE LAS CARGAS a los puntos A y B. Cuando se calcula el trabajo para llevar la carga desde A hasta el centro O, se obtiene

$$-\int_{x_A}^{0} F(x) \cdot dx = \frac{q^2}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \left[\frac{2}{d} - \frac{1}{\sqrt{(d/2)^2 + x_A{}^2}} \right]$$

Cuando se calcula el trabajo para llevar la carga desde infinito hasta el centro O, se obtiene

$$-\int_{\infty}^{0} F(x) \cdot dx = \frac{q^2}{\pi \cdot \varepsilon_o \cdot d}$$

[illegible]

PROBLEMA 12

A lo largo de una longitud L del eje y se colocan N cargas q equiespaciadas simétricas al eje horizontal, a) calcular la fuerza sobre una carga $Q = 10^{-11}$ C ubicada en el eje horizontal como muestra la figura. b) Si L = 10 cm, N = 101 (para incluir la que coincide con el centro de coordenadas) a = 10 cm y las cargas q = 1C, determinar la magnitud de la fuerza. c) Calcule la fuerza sin incluir la carga del centro de coordenadas.

Debido a la simetría, solo interesa la proyección de la fuerza sobre el eje x, entonces la componente de la fuerza sobre el eje x de cada carga sobre la carga Q está dada por

$$F_{nx} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o} \frac{a}{\left[a^2 + \left(n\frac{L}{N}\right)^2\right]^{3/2}}$$

La fuerza total se obtiene sumando todas

$$F_x = \frac{qQa}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{n=-N/2}^{N/2}\frac{1}{\left[a^2+\left(n\frac{L}{N}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad F_x = 810,67N$$

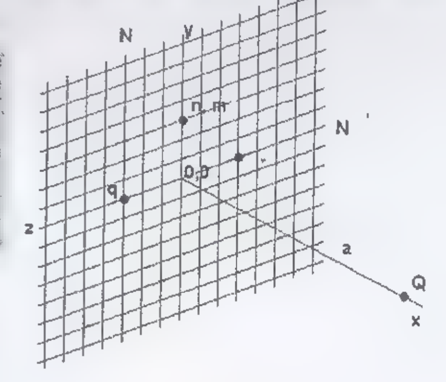
La fuerza sin incluir la carga que está en el centro de coordenadas es

$$F_x = \frac{qQa}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{n=-N/2}^{N/2}\frac{1}{\left[a^2+\left(n\frac{L}{N}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{a^2} = 801,68N$$

En ambos casos ¿cuál será la fuerza sobre el conjunto de cargas?

PROBLEMA 13

En una región cuadrada de lado L de un plano, se colocan NxN cargas q equiespaciadas simétricas al eje horizontal, a) calcular la fuerza sobre una carga Q = 10^{-11} C ubicada en el eje horizontal como muestra la figura. b) Si L =10 cm, N = 101 (para incluir la que coincide con el centro de coordenadas) a =10 cm y el valor de las cargas q = 1C, determinar la magnitud de la fuerza. c) Calcule la fuerza sin incluir la carga del centro de coordenadas.



Debido a la simetría solo interesa la proyección de la fuerza sobre el eje x, entonces la componente de la fuerza sobre el eje x de cada carga sobre la carga Q está dada por

$$F_{nmx} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o}\frac{a}{\left[a^2+\left(n\frac{L}{N}\right)^2+\left(m\frac{L}{N}\right)^2\right]^{3/2}}$$

La fuerza total se obtiene sumando todas

$$F_x = \frac{qQa}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{n=-N/2}^{N/2}\sum_{m=-N/2}^{N/2}\frac{a}{\left[a^2+\left(n\frac{L}{N}\right)^2+\left(m\frac{L}{N}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad F_x = 7.36\times10^{4}N$$

La fuerza sin incluir la carga que está en el centro de coordenadas es

$$F_x = \frac{qQa}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{n=-N/2}^{N/2}\sum_{m=-N/2}^{N/2}\frac{a}{\left[a^2+\left(n\frac{L}{N+1}\right)^2+\left(m\frac{L}{N+1}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{a^2} = 7.359\times10^4\,N$$

¿Cuál sería el valor de la fuerza si faltara las filas de cargas sobre los ejes X e Y?

PROBLEMA 14

Dos cuerpos cargados Q_1 y Q_2 con cargas iguales a 10^{-3} C están separados por una distancia d = 0.01 m. ¿Qué valor de masa debería tener el cuerpo de carga Q_2 para que su peso sea igual en magnitud a la fuerza eléctrica que existe entre ambos cuerpos?

$$P = F_E$$

$$mg = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q^2}{d^2} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q^2}{g\,d^2} = 9.175\times10^4\,kg$$

PROBLEMA 15

Comparar la fuerza de gravitación universal y la fuerza de Coulomb.

$$\vec{F}_G = -\gamma\frac{mM}{r^2}\vec{r}_o \qquad \vec{F}_E = K\frac{qQ}{r^2}\vec{r}_o$$

Esta analogía no supone una identidad entre la naturaleza de ambos tipos de fuerzas, solo indica que los fenómenos de interacción entre cargas y los de interacción entre masas podrán ser estudiados y tratados de un modo similar. A pesar de esta analogía formal, existen algunas diferencias que cabe destacar. La primera se refiere al valor de las constantes G y K. El valor de G resulta ser mucho menor que K:

$$\gamma = 6.67\;10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{Kg^2} \qquad K = 8.98\;10^{9}\,\frac{N\,m^2}{C^2}$$

Por tal motivo, las fuerzas entre cargas serán mucho más intensas que las fuerzas entre masas para cantidades comparables de una y otra magnitud. Además, las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas, mientras que las eléctricas pueden ser atractivas o repulsivas en función de los signos de las cargas que interactúan.

PROBLEMA 16

Un átomo de hidrógeno está formado por un protón y un electrón que se mueve en torno a él. La intensidad de la fuerza atractiva que experimentan es igual a 8,2 10^{-12} N. Determinar el valor de la distancia media que los separa (radio de Bohr).

$$\vec{F}_E = K\frac{qQ}{r^2}\vec{r}_o \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{KqQ}{F_E}} = 0.53\cdot10^{-10}\,m$$

Compare este resultado con el valor del radio usado en el problema 6.

CAPÍTULO IV: CAMPO ELÉCTRICO

PROBLEMA 1

Calcule el campo eléctrico creado por una carga puntual ubicada en el origen de un sistema de referencia, en los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 (ver figura 1). L = 1 cm $Q = 10^{-9}$ C.

Figura 1

Cuestión: determinar el campo eléctrico (módulo dirección y sentido) creado por una carga puntual en distintos puntos del plano.

Magnitudes físicas involucradas: carga eléctrica campo eléctrico, distancias de la carga a los puntos.

Restricciones: Calculo de campo en el plano.

Datos:

$$\varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \qquad L = 0.01\,m \qquad Q = 10^{-9}\,C$$

Representación
En la figura del problema está indicado un sistema de coordenadas x, y solidario con la carga Q. Sobre el punto P_1 se dibuja el vector campo y sus componentes

Marco teórico: La expresión del campo eléctrico creado por una carga puntual es

$$\overline{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \frac{Q}{r^2} \overline{r}_o = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \frac{Q}{r^2} \left(\cos\phi\, \overline{i} + sen\phi\, \overline{j} \right)$$

Campo en P1: las componentes

$$E_x = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{\left(L^2 + 4L^2\right)} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4L^2}} = 8.043 \cdot 10^3\, N/C$$

$$E_y = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{\left(L^2 + 4L^2\right)} \cdot \frac{2 \cdot L}{\sqrt{L^2 + 4L^2}} = 16.086 \cdot 10^3\, N/C$$

El módulo y la orientación

$$E = \sqrt{E_x^{\,2} + E_y^{\,2}} = 17.98 \cdot 10^3\, N/C \qquad \phi = \frac{180}{\pi} \cdot a\tan\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = 63.43^o$$

Resultado
El módulo del campo eléctrico en el punto P_1 es 17.98 10^3 N/C, y forma un ángulo de 63 43° cn el eje x, como la componente en x es positiva y la componente en y es positiva el campo está en el primer cuadrante.

Campo en P2: las componentes

$$E_x = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{L^2} = 8.992 \cdot 10^4\, N/C \qquad E_y = 0$$

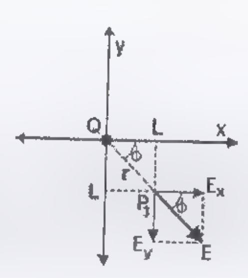
El módulo y la orientación

$$E=\sqrt{E_x^{\ 2}+E_y^{\ 2}}=E_x=8.992\cdot 10^4\,N/C \qquad \phi=\frac{180}{\pi}\cdot a\tan\left(\frac{E_y}{E_x}\right)=0^{o}$$

Resultado
El módulo del campo eléctrico en el punto P_2 es $8.992\cdot 10^4$ N/C, y forma un ángulo de 0° con el eje x

Campo en P3: las componentes

$$E_x=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\cdot\frac{Q}{\left(L^2+L^2\right)}\cdot\frac{L}{\sqrt{L^2+L^2}}=3.179\cdot 10^4\,N/C$$



$$E_y=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\cdot\frac{Q}{\left(L^2+L^2\right)}\cdot\frac{(-L)}{\sqrt{L^2+L^2}}=-3.179\cdot 10^4\,N/C$$

El módulo y la orientación

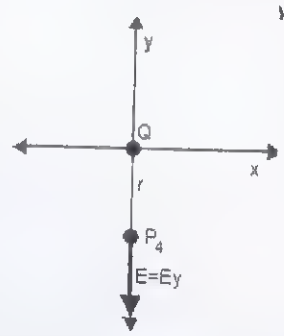
$$E=\sqrt{E_x^{\ 2}+E_y^{\ 2}}=4.496\cdot 10^4\,N/C \qquad \phi=\frac{180}{\pi}\cdot a\tan\left(\frac{E_y}{E_x}\right)=-45^{o}$$

Resultado
El módulo del campo eléctrico en el punto P_3 es 4.496 10^4 N/C, y forma un ángulo de -45° con el eje x, como la componente en x es positiva y la componente en y es negativa el campo está en el cuarto cuadrante.

Campo en P4: las componentes

$$E_x=0$$

$$E_y=-\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\cdot\frac{Q}{L^2}=-8.992\cdot 10^4\,N/C$$



El módulo y la orientación

$$E=\left|E_y\right|=8.992\cdot 10^4\,N/C \qquad \phi=\frac{180}{\pi}\cdot a\tan\left(\frac{E_y}{E_x}\right)=-90^{o}$$

Resultado
El módulo del campo eléctrico en el punto P_4 es 8.992 N/C, y forma un ángulo de -90° con el eje x.

[illegible] del campo se [illegible] puntos ubicados sobre una circunferencia concéntrica a la carga [illegible] constante [illegible]

PROBLEMA 2

Calcule el campo eléctrico creado por dos cargas puntuales en los puntos P_1, P_2, P_3 (ver figura 2). L=0.01 m, $Q_1 = 10^{-9}$ C, $Q_2 = -10^{-9}$ C

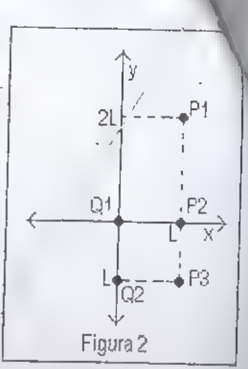


Figura 2

Cuestión: Determinar el campo eléctrico (módulo, dirección y sentido) creado por dos cargas puntuales en distintos puntos del plano

Magnitudes físicas involucradas: carga eléctrica, campo eléctrico, distancias de la carga a los puntos.

Restricciones: Cálculo de campo en el plano.

Datos:

$$\varepsilon_o = 8.85\cdot 10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2} \qquad L = 0.01m \qquad Q_1 = 10^{-9}\,C \qquad Q_2 = -10^{-9}\,C$$

Representación

En la figura del problema está indicado un sistema de coordenadas x, centrado en la carga Q1. Sobre el punto P_1 se dibuja el vector campo y sus componentes

Marco teórico: el campo eléctrico creado por varias cargas puntual y el principio de superposición en el plano

$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{Q_1}{r_1^2}\overline{r_{01}} + \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{Q_2}{r_2^2}\overline{r_{02}}$$

En término de sus componentes

$$E_x = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{Q_1}{r_1^2}\cos\theta_1 + \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{Q_2}{r_2^2}\cos\theta_1$$

$$E_y = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{Q_1}{r_1^2}sen\theta_1 + \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{Q_2}{r_2^2}sen\theta_1$$

Esquema vectorial de los campos en el punto P_1.

Cálculo del campo en el punto P1

$$E1_x = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\cdot\left[\frac{Q_1\cdot(L-0)}{\left(\sqrt{(L-0)^2+(2\cdot L-0)^2}\right)^3} + \frac{Q_2\cdot(L-0)}{\left(\sqrt{(L-0)^2+(2\cdot L+L)^2}\right)^3}\right]$$

$$E1_y = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\cdot\left[\frac{Q_1\cdot(2\cdot L-0)}{\left(\sqrt{(L-0)^2+(2\cdot L-0)^2}\right)^3} + \frac{Q_2\cdot(2\cdot L+L)}{\left(\sqrt{(L-0)^2+(2\cdot L+L)^2}\right)^3}\right]$$

$$\overline{E1} = E1_x\,\bar{i} + E1_y\,\bar{j} \qquad E1 = \begin{bmatrix} 5.199\cdot 10^3 \\ 7.\ 555\cdot 10^3 \\ 0 \end{bmatrix} N/C$$

Módulo $\left|\overline{E1}\right| = 9.171 \cdot 10^3\ N/C$

Orientación $\phi = \frac{180}{\pi} \cdot a\tan\left(\frac{E1_y}{E1_x}\right) = 55.46^o$

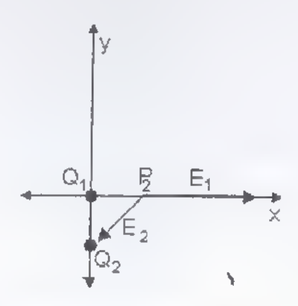
Resultado
El módulo del campo eléctrico en el punto P_1 es $9.171 \cdot 10^3$ N/C, y forma un ángulo de 55.46º con el eje x, como la componente en x es positiva y la componente en y es positiva el campo resultante está en el primer cuadrante.

Cálculo del campo en el punto P2

$$E2_x = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \left[\frac{Q_1}{L^2} + \frac{Q_2 \cdot (L-0)}{\left(\sqrt{(L-0)^2 + (L)^2}\right)^3} \right] = 5.813 \cdot 10^4\ N/C$$

$$E2_y = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \left[\frac{Q_2 \cdot (L)}{\left(\sqrt{(L)^2 + (L)^2}\right)^3} \right] = -3.179 \cdot 10^4\ N/C$$

$$E2 = E2_x \bar{i} + E2_y \bar{j} \qquad E2 = \begin{bmatrix} 5.813 \cdot 10^4 \\ -3.179 \cdot 10^4 \\ 0 \end{bmatrix} N/C$$

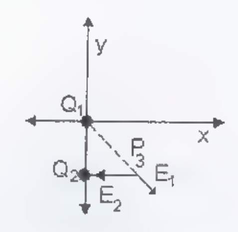


Esquema vectorial de los campos en el punto P_2.

Módulo $\left|E2\right| = 6.625 \cdot 10^4\ N/C$

Orientación $\phi = \frac{180}{\pi} \cdot atan\left(\frac{E2_y}{E2_x}\right) = -28.675^o$

Resultado
El módulo del campo eléctrico en el punto P_2 es $6.625 \cdot 10^4$ N/C, y forma un ángulo de –28.675º con el eje x, como la componente en x es positiva y la componente en y es negativa el campo resultante está en el cuarto cuadrante.



Esquema vectorial de los campos en el punto P_3.

Cálculo del campo en el punto P3

$$E3_x = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \left[\frac{Q_1 \cdot (L-0)}{\left(\sqrt{(L-0)^2 + (-L-0)^2}\right)^3} + \frac{Q_2}{L^2} \right] = -5.813 \cdot 10^4\ N/C$$

$$E3_y = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \left[\frac{Q_1 \cdot (-L-0)}{\left(\sqrt{(L-0)^2 + (-L-0)^2}\right)^3} \right] = -3.179 \cdot 10^4\ N/C$$

$$E3 = E3_x\vec{i} + E3_y\vec{j} \quad \therefore \quad E3 = \begin{bmatrix} -5.813\cdot10^4 \\ -3.179\cdot10^4 \\ 0 \end{bmatrix} N/C$$

Módulo $|E3| = 6.625\cdot10^4\ N/C$

Orientación $\phi = \frac{180}{\pi}\cdot atan\left(\frac{E3_y}{E3_x}\right) = 28.675^o$

Resultado

El módulo del campo eléctrico en el punto P_3 es $6.625\cdot10^4$ N/C, y forma un ángulo de 28 675° con el eje x, como la componente en x es negativa y la componente en y es negativa el campo resultante está en el cuarto cuadrante.

¿En qué punto (x, y) el campo eléctrico es nulo?

PROBLEMA 3

Para la distribución de cargas puntuales de la figura 3, determine el campo eléctrico en el punto P_0. Datos : $Q_1=10^{-9}$ C; Q_2 = 2 10^{-9} C, Q_3 = - 2 10^{-9} C, Q_4 = - 10^{-9} C, L = 2 cm.

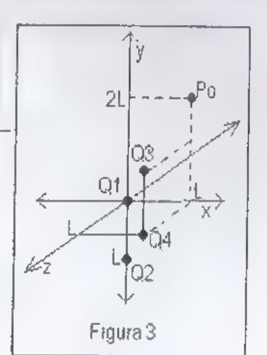


Figura 3

Cuestión: determinar el campo eléctrico (módulo dirección y sentido) creado por cuatro cargas puntuales distribuidas en el espacio (3D)en el punto P_o.

Magnitudes físicas involucradas: carga eléctrica, campo eléctrico, distancias de la carga a los puntos.

Datos:

$$\varepsilon_o = 8.85\cdot10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2} \qquad L = 0.02m$$

$$Q_1 = 10^{-9}C \qquad x_1 = 0m \qquad y_1 = 0m \qquad z_1 = 0m$$

$$Q_2 = 2\cdot10^{-9}C \qquad x_2 = 0m \qquad y_2 = -L \qquad z_2 = 0m$$

$$Q_3 = -2\cdot10^{-9}C \qquad x_3 = L \qquad y_3 = L \qquad z_3 = L$$

$$Q_4 = -10^{-9}C \qquad x_4 = L \qquad y_4 = 0m \qquad z_4 = L$$

Posición Po $x_p = L \qquad y_p = 2\cdot L \qquad z_p = 0m$

Marco teórico: campo eléctrico creado por varias cargas puntuales y principio de superposición en el espacio

$$\overline{E}_P = \sum_{i=1}^{N}\overline{E}_i - \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\sum_{i=0}^{N}\frac{Q_i}{r_{Pi}^{\ 2}}\overline{r_{0i}}$$

En término de sus componentes

Módulo $\left|\overline{E1}\right| = 9.171 \cdot 10^3\ N/C$

Orientación $\phi = \dfrac{180}{\pi} \cdot a\tan\left(\dfrac{E1_y}{E1_x}\right) = 55.46^o$

Resultado

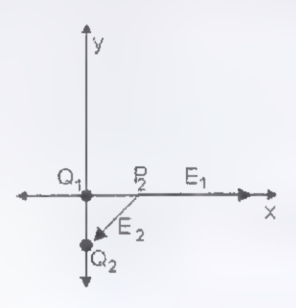
El módulo del campo eléctrico en el punto P_1 es $9.171 \cdot 10^3$ N/C, y forma un ángulo de 55.46° con el eje x, como la componente en x es positiva y la componente en y es positiva el campo resultante está en el primer cuadrante.

Cálculo del campo en el punto P2

$$E2_x = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \left[\frac{Q_1}{L^2} + \frac{Q_2 \cdot (L-0)}{\left(\sqrt{(L-0)^2 + (L)^2}\right)^3}\right] = 5.813 \cdot 10^4\ N/C$$

$$E2_y = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \left[\frac{Q_2 \cdot (L)}{\left(\sqrt{(L)^2 + (L)^2}\right)^3}\right] = -3.179 \cdot 10^4\ N/C$$

$$E2 = E2_x \vec{i} + E2_y \vec{j} \qquad E2 = \begin{bmatrix} 5.813 \cdot 10^4 \\ -3.179 \cdot 10^4 \\ 0 \end{bmatrix} N/C$$



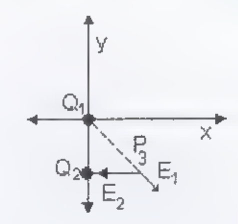
Esquema vectorial de los campos en el punto P_2.

Módulo $|E2| = 6.625 \cdot 10^4\ N/C$

Orientación $\phi = \dfrac{180}{\pi} \cdot atan\left(\dfrac{E2_y}{E2_x}\right) = -28.675^o$

Resultado

El módulo del campo eléctrico en el punto P_2 es $6.625 \cdot 10^4$ N/C, y forma un ángulo de –28.675° con el eje x, como la componente en x es positiva y la componente en y es negativa el campo resultante está en el cuarto cuadrante.



Esquema vectorial de los campos en el punto P_3.

Cálculo del campo en el punto P3

$$E3_x = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \left[\frac{Q_1 \cdot (L-0)}{\left(\sqrt{(L-0)^2 + (-L-0)^2}\right)^3} + \frac{Q_2}{L^2}\right] = -5.813 \cdot 10^4\ N/C$$

$$E3_x = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \left[\frac{Q_1 \cdot (-L \cdot 0)}{\left(\sqrt{(L-0)^2 + (-L-0)^2}\right)^3}\right] = -3.179 \cdot 10^4\ N/C$$

$$E3 = E3_x \vec{i} + E3_y \vec{j} \qquad E3 = \begin{bmatrix} -5.813 \cdot 10^4 \\ -3.179 \cdot 10^4 \\ 0 \end{bmatrix} N/C$$

Módulo $|E3| = 6.625 \cdot 10^4 \; N/C$

Orientación $\phi = \dfrac{180}{\pi} \cdot atan\left(\dfrac{E3_y}{E3_x}\right) = 28.675^o$

Resultado
El módulo del campo eléctrico en el punto P_3 es $6\,625 \cdot 10^4$ N/C, y forma un ángulo de 28 675° con el eje x, como la componente en x es negativa y la componente en y es negativa el campo resultante está en el cuarto cuadrante.

¿En otro punto (x, y) el campo eléctrico es nulo?

PROBLEMA 3

Para la distribución de cargas puntuales de la figura 3, determine el campo eléctrico en el punto P_0. Datos : $Q_1 = 10^{-9}$ C; $Q_2 = 2 \cdot 10^{-9}$ C, $Q_3 = -2 \cdot 10^{-9}$ C, $Q_4 = -10^{-9}$ C, L = 2 cm.

Figura 3

Cuestión: determinar el campo eléctrico (módulo dirección y sentido) creado por cuatro cargas puntuales distribuidas en el espacio (3D)en el punto P_o.

Magnitudes físicas involucradas: carga eléctrica, campo eléctrico, distancias de la carga a los puntos.
Datos:

$$\varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \qquad L = 0.02\,m$$

$$Q_1 = 10^{-9} C \qquad x_1 = 0m \qquad y_1 = 0m \qquad z_1 = 0m$$

$$Q_2 = 2 \cdot 10^{-9} C \qquad x_2 = 0m \qquad y_2 = -L \qquad z_2 = 0m$$

$$Q_3 = -2 \cdot 10^{-9} C \qquad x_3 = L \qquad y_3 = L \qquad z_3 = L$$

$$Q_4 = -10^{-9} C \qquad x_4 = L \qquad y_4 = 0m \qquad z_4 = L$$

Posición Po $\quad x_p = L \qquad y_p = 2 \cdot L \qquad z_p = 0m$

Marco teórico: campo eléctrico creado por varias cargas puntuales y principio de superposición en el espacio

$$\vec{E}_P = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{i=0}^{N} \frac{Q_i}{r_{Pi}^{\;2}} \overline{r_{0i}}$$

En término de sus componentes

$$E_x = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{r_{Pi}^{\ 2}} \cos \alpha_i \qquad E_y = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{r_{Pi}^{\ 2}} \cos \beta_i \qquad E_z = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{r_{Pi}^{\ 2}} \cos \gamma_i$$

Donde $i = 1 \ldots N$ $\quad r_{p,i} = \sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2 + (z_p - z_i)^2}$

Cálculo de los cos directores

$$\cos \alpha_i = \frac{x_p - x_i}{r_{p,i}} \qquad \cos \beta_i = \frac{y_p - y_i}{r_{p,i}} \qquad \cos \gamma_i = \frac{z_p - z_i}{r_{p,i}}$$

Cálculo de las componentes del campo en Po

$$E_x = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{i=1}^{4} \frac{Q_i \cdot \cos \alpha_i}{r_{p,i}^{\ 2}} \qquad E_y = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{i=1}^{4} \frac{Q_i \cdot \cos \beta_i}{r_{p,i}^{\ 2}} \qquad E_z = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \sum_{i=1}^{4} \frac{Q_i \cdot \cos \gamma_i}{r_{p,i}^{\ 2}}$$

Cálculo del módulo del campo total $\quad E = \sqrt{E_x^{\ 2} + E_y^{\ 2} + E_z^{\ 2}} = 2.163 \cdot 10^4 \ N/C$

Cálculo de la orientación del campo

$$\mathrm{A} = \frac{180}{\pi} \cdot a\cos\left(\frac{E_x}{E}\right) = 80.86^o \quad \mathrm{B} = \frac{180}{\pi} \cdot a\cos\left(\frac{E_y}{E}\right) = 122.53^o \quad \Gamma = \frac{180}{\pi} \cdot a\cos\left(\frac{E_z}{E}\right) = 34.106^o$$

Resultado
El módulo del campo eléctrico en el punto P_o es 2.163 10^4 N/C, y forma el ángulo 80.8° con el eje x, forma el ángulo 122.5° con el eje y y forma el ángulo 34.1° con el eje z.

¿En qué principio se basa para sumar los campos eléctricos?

PROBLEMA 4

Calcule el campo eléctrico creado por una varilla de longitud L con densidad de carga uniforme λ a una distancia a de la misma como muestra la figura 4.

Cuestión: determinar el campo eléctrico (módulo dirección y sentido) creado por una distribución continua de cargas en el punto P_o.

Magnitudes físicas involucradas: densidad lineal de carga eléctrica, campo eléctrico, menor distancia del hilo cargo al punto P.

y
λ
a
P
x

Figura 4

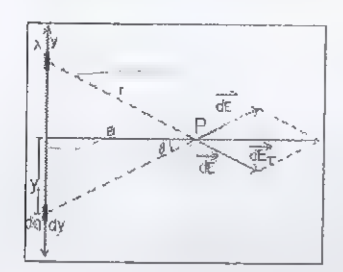
Marco teórico: campo eléctrico creado por una distribución continua de cargas y principio de superposición en el espacio

$$\overline{dE} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \frac{dQ}{r^2} \overline{r_o}$$

Representación: la figura del esquema del problema está en el enunciado y tiene asociado un sistema de referencia.

Calculo y gráficas
Sobre el esquema del problema se dibuja dos elementos de carga simétricos al eje horizontal, ambos producen en el punto P sendos campos eléctricos elementales que forman con el eje horizontal el ángulo θ.

Por la simetría, las componentes de estos campos paralelos al hilo cargado se anulan, mientras las proyección sobre el eje de simetría dan



$$dE_x = \frac{2}{4\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2}\cdot\cos(\theta)$$

$$dq = \lambda\cdot dy \qquad r^2 = a^2 + y^2$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

$$dE_x = \frac{2}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{dQ}{r^2}\cdot\cos(\theta) = \frac{2}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{\lambda\cdot dy}{\left(a^2+y^2\right)}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{\lambda\cdot a\ dy}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{\lambda\cdot a}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\int_0^{L/2}\frac{dy}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{\lambda\cdot L}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot a}\frac{1}{\sqrt{4\ a^2+L^2}}$$

Expresión del campo a una distancia a del eje de la varilla de longitud L, en la dirección radial saliente. En el caso de una varilla muy larga, L tiende a infinito entonces, el campo será

$$\lim_{L\to\infty} E_x = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot a}$$

Respuesta:

a) El campo eléctrico creado por una varilla de longitud L y densidad de carga λ en el punto P es

$$E_p = \frac{\lambda\cdot L}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot a}\frac{1}{\sqrt{4\cdot a^2+L^2}}$$

considerando como eje el hilo cargado el campo tiene dirección radial y saliente. En la expresión puede verse que depende de la longitud de la varilla, de la densidad de carga λ y de la distancia a al punto P

b) Si la varilla es muy larga (a << L) entonces el campo es

$$E_p = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot a}$$

Usando la densidad lineal de carga [illegible] del problema [illegible] capítulo de ley de Coulomb calcule la fuerza y compare los [illegible]

PROBLEMA 5

Calcule el campo eléctrico creado por un anillo de radio R con densidad lineal de carga λ, en un punto P como muestra la figura 5. Considere dos casos en el resultado final: a) a = 0; b) R<<a.

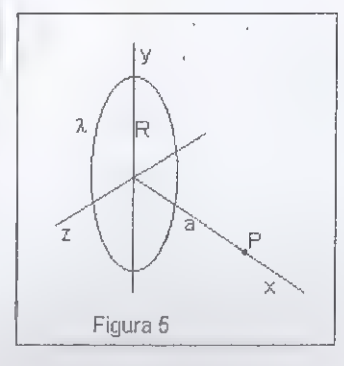


Figura 5

Cuestión: determinar el campo eléctrico (módulo, dirección y sentido) creado por una distribución continua de cargas en el punto P.

Magnitudes físicas involucradas: densidad lineal de carga eléctrica, campo eléctrico, radio del anillo R, distancia a del centro del anillo cargado al punto P.

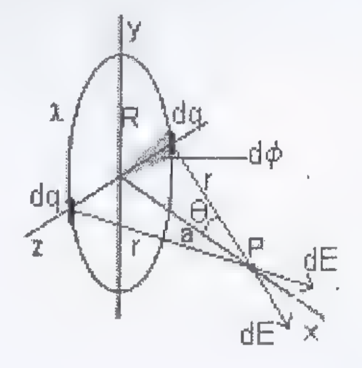
Marco teórico: campo eléctrico creado por una distribución continua de cargas y principio de superposición en el espacio.

$$\overline{dE} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2}\bar{r}_o$$

Representación: la figura del esquema del problema está en el enunciado y tiene asociado un sistema de referencia tridimensional donde el plano del anillo coincide con el plano de los ejes yz

Calculo y gráficas

Sobre el esquema del problema se dibuja dos elementos de carga simétricos, ambos producen en el punto P sendos campos eléctricos elementales que forman con el eje x el ángulo θ. Por la simetría, las componentes de estos campos paralelos al plano del anillo cargado se anulan, mientras las proyecciones sobre el eje x no se cancelan.



Cálculo del campo en el punto P

$$\overline{dE} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{dQ}{r^2}\bar{r}_o$$

la proyección del campo sobre el eje x

$$dE_x = dE\cdot\cos(\theta) = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{dQ}{r^2}\cdot\cos(\theta)$$

$$dQ = \lambda\cdot R\cdot d\phi \qquad r^2 = a^2 + R^2 \qquad \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{\lambda\cdot R\cdot d\phi}{\left(a^2+R^2\right)}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}} = \frac{\lambda\cdot R\cdot a}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{d\phi}{\left(a^2+R^2\right)^{3/2}}$$

El campo a lo largo del eje x resulta

$$E_x = \frac{\lambda\cdot R\cdot a}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{1}{\left(a^2+R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\lambda\cdot R\cdot a}{2\cdot\varepsilon_o}\frac{1}{\left(a^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Cálculo del campo para el caso a = 0

$$\lim_{a\to 0} E_x = \lim_{a\to 0} \frac{\lambda \cdot R \cdot a}{2\cdot\varepsilon_o} \frac{1}{\left(a^2+R^2\right)^{3/2}} = 0$$

Cálculo del campo para el caso R tendiendo a infinito

$$\lim_{R\to\infty} E_x = \lim_{R\to\infty} \frac{\lambda \cdot R \cdot a}{2\cdot\varepsilon_o} \frac{1}{\left(a^2+R^2\right)^{3/2}} = 0$$

Cálculo del campo para el caso R>>a

$$\lim_{a/R\to 0} E_x = \lim_{a/R\to 0} \frac{\lambda \cdot R \cdot a}{2\cdot\varepsilon_o} \frac{1}{R^3\left(\left(\frac{a}{R}\right)^2+1\right)^{3/2}} = \frac{\lambda\cdot a}{2\cdot\varepsilon_o}\frac{1}{R^2}$$

Si a/R <<1 la expresión anterior se puede expresar

$$\lim_{R/a\to 0} E_x = \lim_{R/a\to 0} \frac{\lambda \cdot R \cdot a}{2\cdot\varepsilon_o} \frac{1}{a^3\left(\left(\frac{R}{a}\right)^2+1\right)^{3/2}} = \frac{\lambda\cdot R}{2\cdot\varepsilon_o}\frac{1}{a^2}$$

Respuesta:

a) El campo en el centro del disco (a=0) es nulo

b) El campo para R>>a $E = \frac{\lambda\cdot a}{2\cdot\varepsilon_o}\frac{1}{R^2}$ y para R<<a $E = \frac{\lambda\cdot R}{2\cdot\varepsilon_o}\frac{1}{a^2}$

¿Para qué valor de a el campo es máximo?

PROBLEMA 6

Calcule el campo eléctrico creado por un disco de radio R con densidad superficial de carga σ en un punto P, como muestra la figura 6.

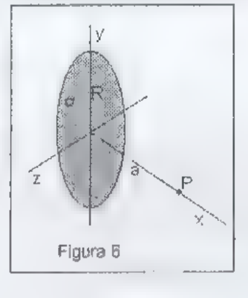
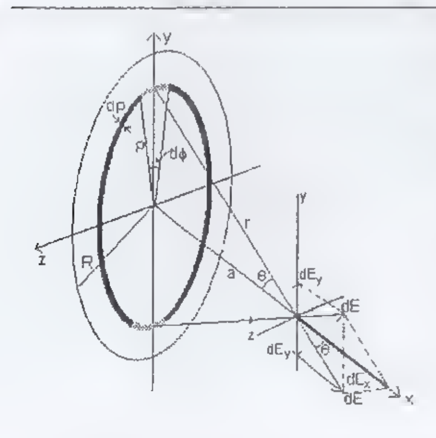


Figura 6



Cálculo del campo en el punto P

De nuevo se emplea

$$\overline{dE} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{dQ}{r^2}\vec{r_o}$$

Se considera un elemento de carga dQ (en la figura está indicado en gris) contenido en un elemento de superficie dado por $dS = \rho\cdot d\phi\cdot d\rho$

El campo en el punto P será

$$\overline{dE}_P = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{dQ}{r^2}\vec{r_o}$$

el cual puede expresarse, para este caso, en términos de sus componentes cartesianas

$$\overline{dE}_P = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{dQ}{r^2}\vec{r}_o = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\cdot\frac{dQ}{r^2}\cos(\theta)\bar{i} + \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{dQ}{r^2}sen(\theta)\bar{j}$$

Al tomar dos elementos de carga simétricos se comprueba que las componentes sobre el eje y se anulan, mientras sobre el eje x no, entonces, basta hacer el análisis con la proyección sobre el eje x de uno de los campo, esto es

$$dE_x = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{dQ}{r^2}\cdot\cos(\theta)$$

Si tenemos en cuenta la densidad superficial de carga σ y las relaciones

$$dQ = \sigma\cdot\rho\cdot d\phi\cdot d\rho \qquad r^2 = a^2 + \rho^2 \qquad \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+\rho^2}}$$

la expresión de la componente del campo queda

$$dE_x = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{\sigma\cdot\rho\cdot d\phi\cdot d\rho}{(a^2+\rho^2)}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+\rho^2}} = \frac{\sigma\cdot a}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{\rho\cdot d\phi\cdot d\rho}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}$$

Para tener en cuenta todo el disco ρ debe integrarse desde 0 a R, mientras que ϕ desde 0 a 2π

$$E_x = \frac{\sigma\cdot a}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\int_0^R \frac{\rho\cdot d\rho}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_o}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

Respuesta

a) Campo en el punto P para el disco finito $E_x = \frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_o}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$

b) Si el punto P tiende a ubicarse en centro del disco el campo será $\lim_{a\to a} E_x = \frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_o}$

c) Si el radio del disco R se hace suficientemente grande el campo tiende a $\lim_{R\to\infty} E_x = \frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_o}$

Obsérvese que las dos últimas condiciones dan el mismo resultado

¿A qué distancia [illegible] el valor del campo se reduce a la mitad del que corresponde al [illegible]

PROBLEMA 7

Se lanza una partícula de carga Q_0 y masa m con velocidad V_0 en una región donde existe un campo eléctrico uniforme E. Analice el movimiento de la partícula e indique la trayectoria si: a) V_0 es paralela a E en el mismo sentido b) V_0 es paralela a E en sentido contrario c) V_0 es perpendicular a E y d) cuando forma un ángulo con E.

Cuestión: Analizar el movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico

Magnitudes físicas involucradas: carga eléctrica y masa de la partícula, campo eléctrico, velocidad inicial.

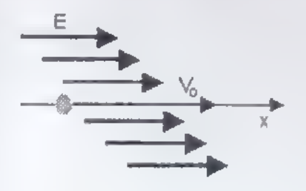
Fenómeno físico: la partícula cargada es afectada por la presencia del campo eléctrico uniforme con una fuerza constante que tendrá la misma dirección que el campo y su sentido dependerá del signo de la carga. Esta fuerza producirá un movimiento acelerado a la partícula, cuya trayectoria dependerá de la orientación que tenga la velocidad inicial de la partícula con respecto a la fuerza.

Marco teórico: Fuerza eléctrica debido al campo eléctrico, movimiento acelerado rectilíneo si la velocidad inicial tiene la misma dirección que el campo eléctrico aplicado o movimiento curvilíneo en el caso que no coincida.

Datos: $Q_o = 10^{-9} C \quad m = 10^{-10} kg \quad E = 10^4 N/m \quad V_o = 500 m/s$

a) V_o es paralela a E en el mismo sentido

Representación: La situación física puede visualizarse haciendo la representación del campo eléctrico E como un conjunto de vectores paralelos y a la partícula (esferita gris) asociarla con un vector que indica la velocidad V_o. Se referencia respecto del eje x





Desarrollo teórico

$$F = Q_o \cdot E \quad \Rightarrow \quad m \cdot \frac{dv}{dt} = Q_o \cdot E \quad \Rightarrow \quad dv = \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot dt$$

integrando $$\int_{V_o}^{v} dv = \int_0^t \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot dt \quad \Rightarrow \quad v = V_o + \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t$$

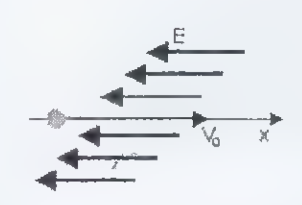
como

$$\frac{dx}{dt} = V_o + \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t \quad \Rightarrow dx = \left(V_o + \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t \right) \cdot dt$$

integrando

$$\int_0^x dx = \int_0^t \left(V_o + \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t \right) \cdot dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = V_o \cdot t + \frac{Q_o}{2 \cdot m} \cdot E \cdot t^2$$

Respuesta: la carga describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.



b) V_0 es paralela a E en sentido contrario

$$F = -Q_o \cdot E \quad \Rightarrow \quad m \cdot \frac{dv}{dt} = -Q_o \cdot E \quad \Rightarrow \quad dv = -\frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot dt$$

integrando $\displaystyle\int_{V_o}^{v} dv = -\int_0^t \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot dt \quad \Rightarrow \quad v = V_o - \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t$

como

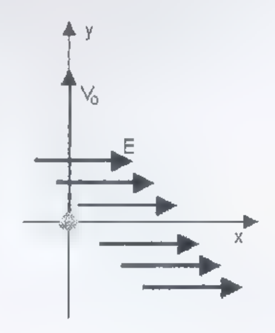
$$\frac{dx}{dt} = V_o - \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t \quad \Rightarrow dx = \left(V_o - \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t \right) \cdot dt$$

integrando

$$\int_0^x dx = \int_0^t \left(V_o - \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t \right) \cdot dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = V_o \cdot t - \frac{Q_o}{2 \cdot m} \cdot E \cdot t^2$$

Respuesta: la carga describe un movimiento rectilíneo uniformemente retardado.

c) V_0 es perpendicular a E



Análisis a lo largo del eje x

$$F_x = Q_o \cdot E \quad \Rightarrow \quad m \cdot \frac{dv_x}{dt} = Q_o \cdot E \quad \Rightarrow \quad dv_x = \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot dt$$

$$\int_0^v dv_x = \int_0^t \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot dt \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t$$

como



$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t \quad \Rightarrow dx = \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t \cdot dt$$

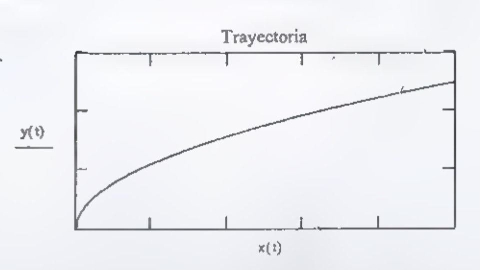
integrando $\displaystyle\int_0^x dx = \int_0^t \left(\frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t \right) \cdot dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{Q_o}{2 \cdot m} \cdot E \cdot t^2$

Análisis a lo largo del eje y

$$F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad m \cdot \frac{dv_y}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_y = Constante = V_o$$

$\displaystyle\frac{dy}{dt} = V_o \quad \Rightarrow dy = V_o \cdot dt$ Integrando

$$\int_0^y dy = \int_0^t V_o \cdot dt \quad \Rightarrow \quad y(t) = V_o \cdot t$$



Trayectoria

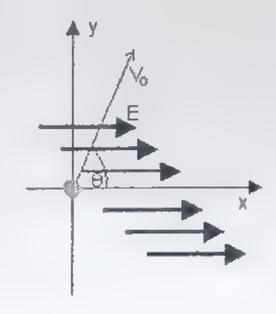
$$\left.\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{Q_o}{2 \cdot m} \cdot E \cdot t^2 \\ y(t) = V_o \cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{Q_o}{2 \cdot m} \cdot E \cdot \left(\frac{y}{V_o}\right)^2$$

Respuesta: la trayectoria es una parábola

d) cuando forma un ángulo con E. $\theta := \frac{\pi}{6}$

Análisis a lo largo del eje x

$$F_x = Q_o \cdot E \quad \Rightarrow \quad m \cdot \frac{dv_x}{dt} = Q_o \cdot E \quad \Rightarrow \quad dv_x = \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot dt$$



$$v_{ox} = V_o \cos(\theta)$$

$$\int_{v_{ox}}^{v} dv_x = \int_0^t \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot dt \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = v_{ox} + \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t$$

como

$$\frac{dx}{dt} = v_{ox} + \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t \quad \Rightarrow dx = v_{ox} + \frac{Q_o}{m} \cdot E \cdot t \cdot dt$$

integrando $$\int_0^x dx = \int_0^t \left(v_{ox} + \frac{Q_o}{m} E \cdot t\right) \cdot dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_{ox} \cdot t \frac{Q_o}{2 \cdot m} \cdot E \cdot t^2$$

Análisis a lo largo del eje y $F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad m \cdot \frac{dv_y}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_y = Constante = V_o \cdot sen(\theta)$

$$\frac{dy}{dt} = V_o \cdot sen(\theta) \quad \Rightarrow dy = V_o \cdot sen(\theta) \cdot dt$$

integrando $$\int_0^y dy = \int_0^t V_o \cdot sen(\theta) \cdot dt \quad \Rightarrow \quad y(t) = V_o \cdot sen(\theta) \cdot t$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = V_o \cdot \cos(\theta) \cdot t + \dfrac{Q_o}{2 \cdot m} \cdot E \cdot t^2 \\ y(t) = V_o \cdot sen(\theta) \cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = ctg(\theta) + \frac{Q_o}{2 \cdot m} \cdot E \cdot \left(\frac{y}{V_o \cdot sen(\theta)}\right)^2$$

Respuesta: la trayectoria es una parábola

PROBLEMA 8

En el espacio comprendido entre dos láminas planas y paralelas cargadas con cargas iguales y opuestas existe un campo eléctrico uniforme. Un electrón es abandonado en reposo sobre la lámina cargada negativamente llega a la superficie de la lámina opuesta, situada a 2 cm de distancia de la primera, al cabo de 1.5 10^{-8} seg a) Calcule la intensidad del campo eléctrico. b)Obtenga la velocidad del electrón cuando llega a la segunda lámina.

Datos $q = 1.6 10^{-19}$ C $m = 9.1\ 10^{-31}$kg $x = 0.02$ m $t = 1.5\ 10^{-8}$ s

El campo eléctrico entre dos placas planas y paralelas cargadas con cargas iguales y opuestas es uniforme y está dado por $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$ (1)

La fuerza sobre una carga q entre las placa es $F = q \cdot E$ (2)

Entonces la aceleración $a = \dfrac{q}{m} \cdot E$ (3) la partícula tiene M.R.U.A.

Si parte del reposo, se tiene $x = \dfrac{1}{2} a \cdot t^2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{q}{m} \cdot E \cdot t^2$ (4)

despejando de (4) $E = \dfrac{2 \cdot x \cdot m}{q \cdot t^2} = 1.1011 N/C$

$$v = \frac{q}{m} \cdot E \cdot t = 2.667 \cdot 10^6 m/s$$

¿Si en vez de un electrón fuera un protón, qué cambios se producirá?

PROBLEMA 9

Una gota de aceite de $3 \cdot 10^{-14}$ kg y 2 10^{-6} m de radio lleva 10 e extras ¿Cuál su velocidad terminal si cae en a) una región donde no hay campo eléctrico y b) un campo eléctrico cuya intensidad es $3 \cdot 10^5$ N/C dirigido hacia abajo?. La viscosidad del aire $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5}$N s /m^2($F_R = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta \cdot v$). Desprecie la fuerza de empuje del aire.

Cuestión: determinar la velocidad límite de la gota de aceite con carga negativa si cae en una región sin y con campo eléctrico aplicado en el aire.
La velocidad límite es valor de la velocidad al que tiende la gota bajo condiciones de equilibrio de las fuerzas que actúan sobre ella.

Variables físicas involucradas: masa, volumen y carga eléctrica de la gota, viscosidad de aire, campo eléctrico.

Fenómeno: Mientras que no hay campo eléctrico aplicado y la gota de aceite cae, su velocidad límite es solo afectada por el rozamiento con el aire. En caso de existir campo su velocidad límite también dependerá de este.

Marco teórico: electrostática y equilibrio mecánico. Fuerza de rozamiento del aire. Viscosidad.

F_R

Gota

v_L

Mg

Datos

$M = 3 \cdot 10^{-14} kg$ $r = 2 \cdot 10^{-6} m$ $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ $Q = 10 \cdot e$ $E = 3 \cdot 10^5 N/C$

$\eta = 1.8 \cdot 10^{-5} N \cdot s/m^2$

Caso a: velocidad terminal de la gota en una región donde no hay campo eléctrico

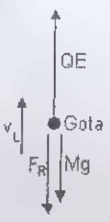
Representación: Sobre la gota actúa el peso y la fuerza de rozamiento ambas representadas con vectores de módulos iguales y sentidos contrarios y la velocidad limite indica hacia donde se mueve la gota

Del esquema y asumiendo que debe existir equilibrio entre las fuerzas que actúan sobre la gota, resulta

$$P - F_R = 0 \quad \Rightarrow \quad M \cdot g = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta \cdot v_L \quad \text{entonces} \quad v_L = \frac{M \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta} = 4.333 \cdot 10^{-4}\, m/s$$

Respuesta: la velocidad limite es $4.333 \cdot 10^{-4}$ m/s

Caso b: velocidad terminal en una región donde hay campo eléctrico



Representación: Sobre la gota actúa el peso, la fuerza eléctrica y la fuerza de rozamiento representadas con vectores cuya suma debe ser cero y la velocidad limite indica hacia donde se mueve la gota (obsérvese que el sentido de F_R se cambió respecto del caso anterior)

$$Q \cdot E - P - F_R = 0 \quad \Rightarrow \quad Q \cdot E - m \cdot g - 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta \cdot v_L = 0$$

$$v_L = \frac{Q \cdot E - M \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta} = 2.741 \cdot 10^{-4}\, m/s$$

Respuesta: la velocidad limite es $2.751 \cdot 10^{-4}$ m/s

Si se desea que disminuya la velocidad terminal de la gota ¿cuál parámetro puede cambiarse con mayor facilidad?

PROBLEMA 10

Se observa que una gota de aceite cargada, en un aparato de Millikan, cae una distancia de 1 mm en 27.2 s en ausencia de campo eléctrico. La misma gotita se mantiene estacionaria en un campo eléctrico de 2.37×10^4 N/C. Calcule el número de electrones en exceso que porta la gota. La viscosidad del aire es de 1.8×10^{-5} N s /m², la densidad del aceite es de 800kg/m³.

Datos

$$L = 1mm \quad t = 27.2s \quad E = 2.37 \cdot 10^4\, N/C \quad \eta = 1.8 \cdot 10^{-5}\, N \cdot s/m^2 \quad \delta_{aceite} = 800\, kg/m^3$$

$V_L = 2.74\ 10^{-4}$ m/s

$$P - F_R = 0 \quad \Rightarrow \quad M \cdot g = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta \cdot v_L \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \delta_a \cdot g = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta \cdot v_L$$

$$r = \sqrt{\frac{18 \cdot \pi \cdot \eta \cdot v_L}{4 \cdot \delta_a \cdot g}}$$

En condiciones estacionarias (en reposo) se cumple

$$Q \cdot E - M \cdot g = 0 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow Q = \frac{M \cdot g}{E} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \delta_a \cdot g}{3 \cdot E} = 3.675 \cdot 10^{-17}\, C$$

Nro de electrones $\qquad Ne = \dfrac{Q}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 230\, electrones$

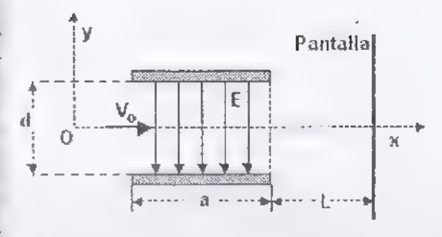
Si el valor del campo eléctrico aumenta respecto del indicado ¿hacia donde se mueve la gota?

PROBLEMA 11

Entre dos placas conductoras paralelas existe un campo eléctrico uniforme E = 16·10⁴ N/C, las placas están separadas una distancia d = 0.08 m y tienen un ancho a = 0.02m, como muestra la figura. En esa región, ingresa un electrón con velocidad $V_o = 4\cdot10^7$ m/s

a) Determine la desviación respecto de su dirección original y la velocidad en el instante que sale de las placas paralelas

b) Determine la desviación respecto de su dirección original cuando incide sobre la pantalla (L = 0.2 m).



Cuestión: Analizar el movimiento de una partícula cargada en una región donde existe un campo eléctrico y cuando sale de ella.

Magnitudes físicas involucradas: carga electrica y masa de la partícula, campo eléctrico, velocidad inicial.

Fenómeno físico: Sobre la partícula cargada actúa una fuerza eléctrica constante debido a la presencia del campo eléctrico uniforme que tendrá la misma dirección que el campo y su sentido dependerá del signo de la carga.
Esta fuerza producirá un movimiento acelerado a la partícula, cuya trayectoria dependerá de la orientación que tenga la velocidad inicial de la partícula con respecto a la fuerza.

Marco teórico: Fuerza eléctrica debido al campo eléctrico, movimiento curvilíneo, ecuaciones paramétricas del tipo de proyectil

Datos: $E = 16\cdot10^4\, N/C \quad d = 0.08\,m \quad a = 0.02\,m \quad V_o = 4\cdot10^7\,m/s \quad L = 0.2\,m$

a) Para la región entre las placas se cumple $\quad x(t) = V_o \cdot t \qquad y(t) = \frac{1}{2}\frac{q\cdot E}{M}t^2$

Eliminando el tiempo t se obtiene la ecuación de la trayectoria $\quad y(x) = \frac{1}{2}\frac{q\cdot E}{M}\left(\frac{x}{V_o}\right)^2$

La desviación respecto de su dirección original está dada por $\quad y(a) = \frac{1}{2}\frac{q\cdot E}{M}\left(\frac{a}{V_o}\right)^2 = 3.51\cdot10^{-3}\,m$

El tiempo que tarda en llegar al final de las placas está dado por $\quad t_o = \frac{a}{V_o} = 5\cdot10^{-10}\,s$

las velocidades para t_o $\quad V_x(t_o) = V_o = 4\cdot10^7\,m/s \qquad V_y(t_o) = \frac{q\cdot E}{M}t_o = 1.407\cdot10^7\,m/s$

$$\overline{V}(t_o) = V_x(t_o)\bar{i} + V_y(t_o)\bar{j} = \left[4\cdot10^7\,m/s\right]\bar{i} + \left[1.407\cdot10^7\,m/s\right]\bar{j}$$

$$\left|\overline{V}(t_o)\right| = \sqrt{V_x^2(t_o) + V_y^2(t_o)} = 2.4\cdot10^7\,m/s$$

El ángulo respecto de la horizontal $\quad \varphi = \frac{180}{\pi}a\tan\left(\frac{v_y(t_o)}{v_x(t_o)}\right) - 19.37^o$

La desviación respecto de su dirección original cuando incide sobre la pantalla (L = 0.2 m)

$$y_T = L\frac{v_y(t_o)}{v_x(t_o)} + y(a) = 0.07\,m + 0.00351\,m = 0.0735\,m$$

Si el valor del campo se reduce a la mitad la desviación del electrón respecto de su dirección original, ¿se reduce o aumenta?

PROBLEMA 12

Calcule el campo eléctrico creado por un dipolo en: a) puntos equidistantes de ambas cargas P1. b) puntos sobre la recta que une ambas cargas y fuera de ellas, P2. c) puntos sobre la recta que une ambas cargas y entre ellas, P3. Ver figura 6

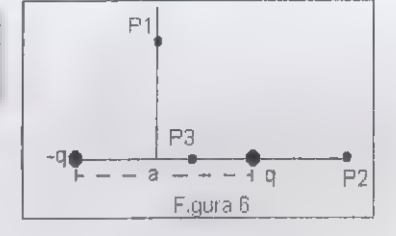


Figura 6

Cuestión: determinar el campo eléctrico (módulo dirección y sentido) creado por un dipolo en distintos puntos del plano.

Magnitudes físicas involucradas: carga eléctrica, campo eléctrico, distancias de la carga a los puntos.

Restricciones: Cálculo de campo en el plano.

Datos $q = 10^{-9}\,C \quad a = 0.01\,m \quad \varepsilon_o = 8.85\cdot 10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2}$

Carga –q $\quad x_1 = -a/2 \qquad y_1 = 0\,m$

Carga q $\quad x_2 = a/2 \qquad y_2 = 0\,m$

Cálculo del campo eléctrico en el punto $P(x_o, y_o)$

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{Q_1}{r_1^2}\overline{r_{01}} + \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{Q_2}{r_2^2}\overline{r_{02}}$$

En término de sus componentes

$$E_x = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{Q_1}{r_1^2}\cos\theta_1 + \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{Q_2}{r_2^2}\cos\theta_1$$

$$E_y = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{Q_1}{r_1^2}sen\theta_1 + \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{Q_2}{r_2^2}sen\theta_1$$

$$E_x(x_o, y_o) = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\left[-\frac{q\cdot(x_o - x_1)}{\left[(x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2\right]^{3/2}} + \frac{q\cdot(x_o - x_2)}{\left[(x_o - x_2)^2 + (y_o - y_2)^2\right]^{3/2}}\right]$$

$$E_y(x_o, y_o) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \left[-\frac{q \cdot (y_o - y_1)}{\left[(x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2 \right]^{3/2}} + \frac{q \cdot (y_o - y_2)}{\left[(x_o - x_2)^2 + (y_o - y_2)^2 \right]^{3/2}} \right]$$

$$\overline{E}(x_o, y_o) = E_x(x_o, y_o)\,\overline{i} + E_y(x_o, y_o)\,\overline{j}$$

Módulo $\left|\overline{E}(x_o, y_o)\right| = \sqrt{E_x^2(x_o, y_o) + E_y^2(x_o, y_o)}$

Orientación $\phi(x_o, y_o) = \frac{180}{\pi} a\tan\left(\frac{E_y(x_o, y_o)}{E_x(x_o, y_o)} \right)$

a) Puntos equidistantes de ambas cargas, P1(0,a)

$E_x(0,a) = -6.434 \cdot 10^4\, N/C$ $\qquad E_y(0,a) = 0\; N/C$

$$\overline{E}(0,a) = \left[-6.434 \cdot 10^4\, N/C \right] \overline{i}$$

Módulo $\left|\overline{E}(0,a)\right| = 6.434 \cdot 10^4\, N/C$ Orientación $\phi(0,a) = 0$ de acuerdo con el signo de la componente en x, la orientación es $\phi = 180°$

b) Puntos sobre la recta que une ambas cargas y fuera de ellas, P2(2a,0)

$E_x(2 \cdot a, 0) = 2.558 \cdot 10^4\, N/C$ $\qquad E_y(2 \cdot a, 0) = 0\; N/C$

$$\overline{E}(2 \cdot a, 0) = \left[2.558 \cdot 10^4\, N/C \right] \overline{i}$$

Módulo $\left|\overline{E}(2 \cdot a, 0)\right| = 2.558 \cdot 10^4\, N/C$

Orientación $\phi(2 \cdot a, 0) = 0$ a lo largo del eje +x

c) Puntos sobre la recta que une ambas cargas y entre ellas, P3(a/3, 0).

$E_x(a/3, 0) = -3.367 \cdot 10^6\, N/C$ $\qquad E_y(a/3, 0) = 0\; N/C$

$$\overline{E}(a/3, 0) = \left[-3.367 \cdot 10^6\, N/C \right] \overline{i}$$

Módulo $\left|\overline{E}(a/3, 0)\right| = 3.367 \cdot 10^6\, N/C$

Orientación $\phi(a/3, 0) = 0$ de acuerdo con el signo de la componente en x, la orientación es $\phi = 180°$

[illegible]

PROBLEMA 13

Un dipolo que tiene un momento dipolar p = q a C.m, forma un ángulo ϕ con la dirección de un campo eléctrico uniforme E a) Calcule el par que actúa sobre el dipolo. b) Calcule el trabajo necesario para invertir la orientación del dipolo desde su posición de equilibrio, paralelo al campo, a la opuesta.

Fenómeno: Un dipolo en un campo eléctrico sufrirá la acción de dos fuerzas de igual magnitud y de sentido opuesto, si estas fuerzas no están en la misma recta de acción, sobre el dipolo actuará un momento de fuerza.

Representación: El dibujo muestra un dipolo de momento dipolar P = q a colocado en un sistema de referencia x, y con su eje formado un ángulo ϕ con el eje x. La dirección y sentido del campo eléctrico E coincide con el sentido positivo del eje x. Sobre cada carga del dipolo se dibujó una fuerza.

La fuerza sobre la carga q es $\vec{F} = q \cdot E\,\vec{i}$

El vector posición de la carga q es $\vec{r}_1 = \frac{a}{2}\cos(\phi)\,\vec{i} + \frac{a}{2}sen(\phi)\,\vec{j}$

El momento de fuerza sobre la carga q será

$$\overline{M}_1(\vec{F},0) = \vec{r}_1 \wedge \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{a}{2}\cos(\phi) & \frac{a}{2}sen(\phi) & 0 \\ qE & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{a}{2}qE\,sen(\phi)\,\vec{k}$$

La fuerza sobre la carga - q es $\vec{F} = -q \cdot E\,\vec{i}$

El vector posición de la carga - q es

$$\vec{r}_2 = -\frac{a}{2}\cos(\phi)\,\vec{i} - \frac{a}{2}sen(\phi)\,\vec{j}$$

El momento de fuerza sobre la carga –q será

$$\overline{M}_2(\vec{F},0) = \vec{r}_2 \wedge \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{a}{2}\cos(\phi) & -\frac{a}{2}sen(\phi) & 0 \\ -qE & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{a}{2}qE\,sen(\phi)\,\vec{k}$$

El momento total sobre el dipolo es

$$\overline{M}_T = \overline{M}_1(\vec{F},0) + \overline{M}_2(\vec{F},0) = -a\,q\,E\,sen(\phi)\,\vec{k} = -p\,E\,sen(\phi)\,\vec{k}$$

Calculo del trabajo necesario para invertir la orientación del dipolo desde su posición de equilibrio, paralelo al campo, a la opuesta.

$$W = \int_0^{\pi} |M_T| \cdot d\phi = pE\int_0^{\pi} sen(\phi) \cdot d\phi = 2pE$$

Respuesta

a) El par sobre el dipolo es $\overline{M_T} = -p\,E\,sen(\phi)\,\bar{k}$

b) El trabajo sobre el dipolo para invertir su orientación $W = 2\,p\,E$

Averigüe el momento dipolar eléctrico de la molécula de agua

PROBLEMA 14

Un plano infinito tiene una distribución superficial de carga σ, en sus proximidades se encuentra un hilo infinito con densidad lineal de carga λ, como muestra la figura 7. Determine el campo eléctrico creado por ambos en los puntos A, B, C.

Cuestión: Cálculo del campo eléctrico creado por distintas distribuciones de cargas continuas.

Marco teórico: Principio de superposición aplicado a campo eléctrico.

Datos

$\lambda = 1\,C/m \qquad \sigma = 1\,C/m^2 \qquad a = 0.5\,m$

$\varepsilon_o = 8.85\cdot 10^{-12}\,\dfrac{C^2}{N\cdot m^2}$

$r_A = 0.45\,m \quad r_B = 0.60\,m \quad x_C = 0.3\,m \quad z_C = 0.1\,m$

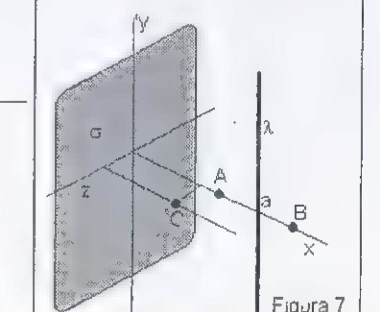


Figura 7

Campo eléctrico en el punto A

El campo debido a la densidad lineal de carga

$$\overline{E_\lambda}(r_A) = \frac{-\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot|r_A - a|}\,\bar{i}$$

el signo menos indica el sentido del campo en A.

El campo debido a la densidad superficial de carga $\quad \overline{E_\sigma}(r_A) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\,\bar{i}$

Ambos campos están en la misma dirección

$$\overline{E_A}(r_A) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\,\bar{i} - \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o\,|a - r_A|}\,\bar{i} = (-3.03210^{11}\,N/C)\,\bar{i}$$

Campo eléctrico en el punto B

El campo debido a la densidad lineal de carga $\qquad \overline{E_\lambda}(r_B) = \dfrac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot|r_B - a|}\,\bar{i}$

El campo debido a la densidad superficial de carga $\quad \overline{E_\sigma}(r_B) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\,\bar{i}$

Ambos campos están en la misma dirección

$$\overrightarrow{E_T}(r_B)=\frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\,|r_B-a|}\bar{i}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\bar{i}=\left[2.363\cdot10^{11}\,N/C\right]\bar{i}$$

Campo eléctrico en el punto C

El campo debido a la densidad lineal de carga

$$\overrightarrow{E_\lambda}(r_C)=\frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot\sqrt{(x_c-a)^2+z_C^2}}\left[\frac{(x_c-a)\bar{i}-z_C\bar{k}}{\sqrt{(x_c-a)^2+z_C^2}}\right]$$

El campo debido a la densidad superficial de carga $\overrightarrow{E_\sigma}(r_C)=\frac{\sigma}{\varepsilon_o}\bar{i}$

$$\overrightarrow{E_T}(r_C)=\overrightarrow{E_\lambda}(r_C)+\overrightarrow{E_\sigma}(r_C)=\frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot\sqrt{(x_c-a)^2+z_C^2}}\left[\frac{(x_c-a)\bar{i}-z_C\bar{k}}{\sqrt{(x_c-a)^2+z_C^2}}\right]+\frac{\sigma}{\varepsilon_o}\bar{i}$$

$$\overrightarrow{E_T}(r_C)=\left[-1.544\cdot10^{10}\,N/C\right]\bar{i}+\left[-3.597\cdot10^{10}\,N/C\right]\bar{k}$$

$$\left|\overrightarrow{E_T}(r_C)\right|=3.914\cdot10^{10}\,N/C$$

$$\phi_C=a\tan\left(\frac{E_z}{E_x}\right)=+246.77^o$$ respecto eje x positivo

¿Existe algún punto donde el campo pueda ser nulo?

PROBLEMA 15

Una carga puntual q está ubicada en el origen de coordenadas y un hilo infinitamente largo con densidad lineal λ paralelo al eje Y corta el eje en x = d. Determinar los puntos sobre el eje X en los cuales el campo eléctrico se anula.

Datos

$$\lambda=2\cdot10^{-9}\ C/m \qquad q=10^{-9}\,C \quad d=0.5\,m \quad \varepsilon_o=8.85\cdot10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2}$$

Campo creado por la carga puntual

$$\overrightarrow{E_q}(r)=\frac{q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot r^2}\bar{i}$$

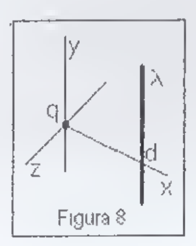


Figura 8

Campo creado por la densidad lineal de carga λ

$$\overrightarrow{E_\lambda}(r)=\frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot(d-r)}\bar{i}$$

Condición para que el campo sea cero

$$\vec{E_q}(r) - \vec{E_\lambda}(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o \cdot r^2} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o \cdot (d - r)}$$

entonces $r^2 + \frac{q}{2\lambda} r - \frac{q\,d}{2\lambda} = 0$

$a = 1 \quad b = \frac{q}{2\lambda} = 0.25\,m \qquad c = -\frac{q\,d}{2\lambda} = -0.125\,m^2$

La ecuación tiene dos raíces $r_1 = 0.25\,m \qquad r_2 = -0.5\,m$

Pero solo la primera tiene interpretación física, es la posición entre ambas distribuciones de carga. Si analizamos los campos en la posición correspondiente a r_2, ahí ellos tienen el mismo sentido.

El hecho de que el campo eléctrico es nulo en 1 punto [illegible] que un cuerpo cargado colocado en [illegible] equilibrio existe en un entorno de ese punto.

CAPITULO V: LEY DE GAUSS

Aplicación de la ley de Gauss para determinar los campos eléctricos producidos por distribuciones de carga con simetría.

Se usará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ conociendo cómo es la distribución de cargas.

Considerando que el campo está dentro de la integral en la expresión

$$\oiint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (1)$$

para extraer el campo de la integral debe seleccionarse una superficie gaussiana que cumpla con.

- Debe pasar por el punto donde se quiere calcular el campo
- Debe contener a la carga de interés.
- Debe respetar la simetría de la distribución de carga.

Esto último implica que se pueden elegir superficies gaussianas donde $\vec{E}(r)$ y $\vec{dS}$ sean paralelos y el campo en todos los puntos de esa superficie sea constante y por lo tanto, independiente de $\vec{dS}$, entonces es posible extraer de la integral (1) el módulo del campo.

También es posible elegir las superficies con $\vec{dS}$ perpendicular a $\vec{E}(r)$, en este caso simplemente se anula el flujo.

PROBLEMA 1

En una región donde existe un campo eléctrico constante $E = 2.10^6$ N/C. Calcule el flujo eléctrico a través de una superficie plana de área 2 m^2 si se coloca
a) el plano de la superficie perpendicular a la dirección de campo.
b) el plano de la superficie paralelo a la dirección de campo.
c) el plano de la superficie formando un ángulo de 50° a la dirección de campo.

Cuestión: Cálculo de flujo eléctrico a través de una superficie plana constante con distintas orientaciones respecto del campo eléctrico.

Magnitudes físicas involucradas Flujo eléctrico, campo eléctrico y superficie.

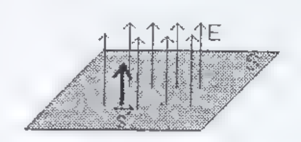
Restricciones: Calculo del flujo eléctrico a través de una superficie plana constante

Datos: $E = 2\cdot10^6 N/C \qquad S = 2m^2$

Representación
Al campo eléctrico E se representa como un conjunto de vectores iguales paralelos y a la superficie con un vector normal al plano de la misma con trazo más grueso.

Marco teórico: Electrostática. Flujo eléctrico.
El flujo del campo eléctrico a través de una superficie es

$$\phi_E = \iint_S \vec{E}.\vec{dS} \quad (2)$$



a) El plano de la superficie perpendicular a la dirección de campo. Considerando que el vector superficie se representa

perpendicular al plano de la superficie entonces el campo eléctrico es paralelo a cualquier elemento de superficie

$$\phi_E = \iint_S \vec{E}.\vec{dS} = \int_S\int E\cos(0^o)\,dS$$

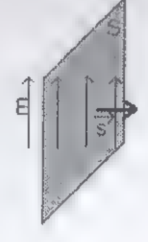
y por ser constante en todos los puntos de la superficie

$$\phi_E = \int_S\int E\cos(0^o)\,dS = E\int_S\int dS = E\,S$$

$$\phi_E = 4\times10^6\,\frac{N\,m^2}{C}$$

b) El plano de la superficie paralelo a la dirección de campo

$$\phi_E = E\,S\,cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad \phi_E = 0\,\frac{N\,m^2}{C}$$

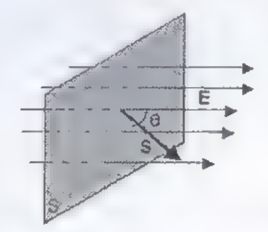


c) El plano de la superficie formando un ángulo de 50° a la dirección de campo

$$\theta = 50\,\frac{\pi}{180}$$

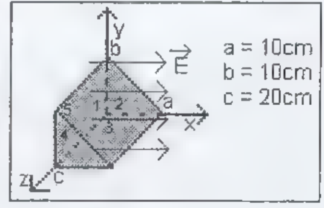
$$\phi_E = E\,S\,cos(\theta)$$

$$\phi_E = 2.571\times10^6\,\frac{N\,m^2}{C}$$



PROBLEMA 2

En la figura se presenta una caja triangular en una región donde existe un campo electrico de intensidad 2 10^5 N/C. Calcule el flujo eléctrico a través cada cara de la caja y de la superficie completa.



Cuestión: Cálculo del flujo eléctrico a través de una superficie cerrada prismática constante con caras en distintas orientaciones respecto del campo eléctrico.

Magnitudes físicas involucradas Flujo eléctrico, campo eléctrico y superficie.

Restricciones: Campo eléctrico constante.

Datos: a = 0.1 m b = 0.1 m c = 0.2 m

El campo eléctrico se puede escribir teniendo en cuenta la figura $E = \left[2\cdot10^5\,N/C\right]\hat{i}$

Representación

Al campo eléctrico E se representa como un conjunto de vectores iguales paralelos al eje x y el vector superficie de cada cara como un vector normal al plano de la misma.

Marco teórico: Electrostática. Flujo eléctrico. Ley de Gauss

El flujo del campo eléctrico a través de una superficie es $\phi_E = \iint_S \vec{E}.\vec{dS}$

Para hacer el análisis del flujo, se considera las caras del prisma por separado y a cada cara se identifica con un número.

Cara 1
La cara 1 es paralela al plano (y, z) entonces el elemento de superficie es $\overline{dS_1} = -(dy\,dz)\bar{i}$

La dirección es x, perpendicular al plano (y, z) donde está y el sentido debe ser saliente, por eso, es negativo.
El flujo elemental en la cara 1 es

$$d\phi_1 = \overline{E}\cdot\overline{dS_1} = -|E|\,dy\,dz$$

integrando $$\phi_1 = -\int_0^b\int_0^c |E|\,dz\,dy = -4\cdot 10^3\,\frac{N\cdot m^2}{C}$$

Cara 2 $\overline{dS_2} = (dx\,dy)\bar{k}$ $\quad d\phi_2 = \overline{E}\cdot\overline{dS_2} = 0$ $\quad \phi_2 = 0\,\frac{N\cdot m^2}{C}$

Cara 3 $\overline{dS_3} = -(dz\,dx)\bar{j}$ $\quad d\phi_3 = \overline{E}\cdot\overline{dS_3} = 0$ $\quad \phi_3 = 0\,\frac{N\cdot m^2}{C}$

Cara 4 $\overline{dS_4} = (dx\,dy)\bar{k}$ $\quad d\phi_4 = \overline{E}\cdot\overline{dS_4} = 0$ $\quad \phi_4 = 0\,\frac{N\cdot m^2}{C}$

Cara 5 $\overline{dS_5} = \left(dz\,\frac{dL}{\sqrt{2}}\right)(\bar{i}+\bar{j})$ $\quad donde \quad dL = \sqrt{dx^2+dy^2}$

como $y(x) = -x + 0.1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 \quad dL = \sqrt{2}\,dx$
entonces

$\overline{dS_5} = (dz\,dx)(\bar{i}+\bar{j})$ $\quad d\phi_5 = |E|\,dz\,dx$ $\quad \phi_5 = \int_0^a\int_0^c |E|\,dz\,dx = 4\cdot 10^3\,\frac{N\cdot m^2}{C}$

El flujo total es la suma de los flujos a través de cada cara

$$\phi_T = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 = 0\,\frac{N\cdot m^2}{C}$$

Resultado: El flujo neto es cero. Una conclusión adicional empleando la ley de Gauss es: como el flujo neto a través de la caja triangular es cero no existe carga eléctrica neta en su interior

¿Qué debe hacer para que el flujo del campo eléctrico sea distinto de cero?

PROBLEMA 3

Un campo eléctrico está dado por $\vec{E} = p\,z\,\vec{i} + q\,x\,\vec{k}$ donde p y q son constantes. Determine el flujo eléctrico a través de la superficie mostrada en la figura.

Cuestión: Cálculo de flujo eléctrico a través de una superficie sombreada de la figura.

Magnitudes físicas involucradas Flujo eléctrico, campo eléctrico y superficie.

Restricciones: Superficie plana constante, contenida en el plano x, y.

Datos: El campo eléctrico $\vec{E} = p\,z\,\vec{i} + q\,x\,\vec{k}$ donde p y q son constantes

Marco teórico: Electrostática. Flujo eléctrico.

El flujo del campo eléctrico a través de una superficie es $\phi_E = \iint_S \vec{E}.\vec{dS}$

Entonces los vectores pueden expresarse

$$\vec{dS} = dx\,dy\,\vec{k} \qquad \vec{E} = p\,z\,\vec{i} + q\,x\,\vec{k}$$

$$d\phi = \vec{E}\cdot\vec{dS} = \left(p\,z\,\vec{i} + q\,x\,\vec{k}\right)\cdot\left(dx\,dy\,\vec{k}\right) = q\,x\,dx\,dy$$

de la gráfica surge que $y(x) = \dfrac{b}{a}x$

$$d\phi = q\,x\,y(x)dx = q\frac{b}{a}x^2\,dx$$

$$\phi = \int_0^a q\frac{b}{a}x^2 dx = \frac{1}{3}a^2\,b\,q$$

Resultado: El flujo a través de la superficie de la figura es $\phi = \dfrac{1}{3}a^2\,b\,q$

PROBLEMA 4

En la figura 3 se muestran tres superficies cerradas S_1, S_2 y S_3, y las cargas puntuales Q, -Q, 2Q y -2Q. Encuentre el flujo a través de cada superficie.

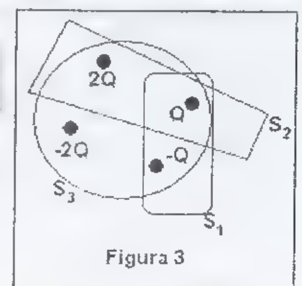


Figura 3

Cuestión: Cálculo de flujo eléctrico a través de una superficie cerrada .

Magnitudes físicas involucradas Flujo eléctrico, cargas eléctricas, campo eléctrico y superficie.

Representación
Conjunto de cargas puntuales identificadas por sus valores y

representadas por círculos negros y curvas cerradas en el plano que representan distintas superficies que contienen a las cargas puntuales.

Marco teórico: Electrostática. Flujo eléctrico. Ley de Gauss
La ley de Gauss: el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por dicha superficie

$$\phi_E = \iint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Caso superficie S_1 Las cargas en su interior son Q y -Q entonces $\phi_E = \frac{Q-Q}{\varepsilon_o} = 0$

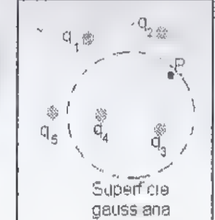
Caso superficie S_2 Las cargas en su interior son Q y 2Q entonces $\phi_E = \frac{Q+2Q}{\varepsilon_o} = \frac{3Q}{\varepsilon_o}$

Caso superficie S_3 Las cargas en su interior son Q, -Q, 2Q y -2Q entonces $\phi_E = \frac{Q-Q+2Q-2Q}{\varepsilon_o} = 0$

Elija una superficie para la cual el flujo eléctrico sea -3Q/ε.

PROBLEMA 5

Considere la superficie gaussiana que rodea parte de la distribución de carga mostrada en la figura a) ¿Cuál de las cargas contribuye al campo eléctrico en el punto P? b) Calcule el flujo del campo eléctrico a través de la superficie punteada de la figura



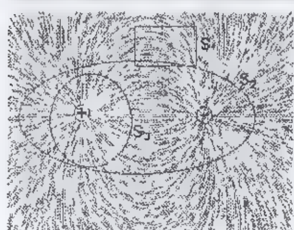
a) Todas las cargas contribuyen al campo eléctrico en el punto P

b) Solo interesan las que se hallan dentro de la superficie punteada, por lo tanto,

$$\phi_E = \frac{(q_3 + q_4)}{\varepsilon_o}$$

PROBLEMA 6

Para los espectros de campo eléctricos de las figuras, determine el flujo de acuerdo con las superficies indicadas, suponiendo que el valor de las cargas son iguales a q.



Para el espectro de la izquierda

Para la superficie S_1 $\quad \phi_E = 0$

Para la superficie S_2 $\quad \phi_E = \dfrac{(q-q)}{\varepsilon_o} = 0$

Para la superficie S_3 $\quad \phi_E = \dfrac{q}{\varepsilon_o}$

Para el espectro de la derecha,

Para la superficie S_1 $\quad \phi_E = \dfrac{(q+q)}{\varepsilon_o}$

Para la superficie S_2 $\quad \phi_E = 0$

Para la superficie S_3 $\quad \phi_E = 0$

Para la superficie S_4 $\quad \phi_E = 0$

PROBLEMA 7

Una medida del campo eléctrico cerca de la superficie terrestre es 100N/C, apuntando radialmente hacia adentro, asumiendo que ese valor es constante en cualquier punto de la superficie, determine la carga total que debería estar almacenada en la Tierra

Considerando la ley de Gauss

$$\phi_E = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad \varepsilon_o = 8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{N\cdot m^2} \qquad E = 100N/C$$

Asumiendo que el campo es uniforme en todos los puntos de la superficie terrestre y considerando que el radio medio de la misma es

$R_T = 5400\cdot 10^3\, m$ Entonces

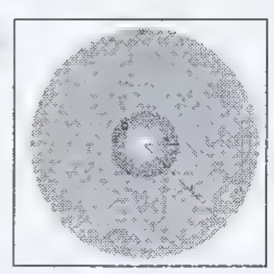
Aplicando la ley de Gauss en la superficie de radio R_T resulta

$$-E\cdot 4\cdot\pi\cdot R_T^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad Q = -E\cdot 4\cdot\pi\cdot R_T^2\cdot\varepsilon_o = -3.234\cdot 10^5\, C$$

¿Cómo se explica el signo menos?

PROBLEMA 8

Calcular el campo eléctrico creado por una esfera conductora con carga Q y de radio a, en el interior y exterior de la misma.



Para r < a

Como es un cuerpo conductor cargado, en condiciones estáticas, la carga se distribuye en la superficie, si se emplea la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en puntos que cumplan r < a Se debe elige una superficie gaussiana esférica de radio r concéntrica a la esfera cargada de radio a, como la carga neta encerrada por dicha

superficie es cero, entonces el campo eléctrico es cero

$$E(r) = 0 \quad \text{para} \quad r < a$$

Para r ≥ a

Se usará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en puntos que cumplan $r \geq a$, para eso se **elige** una superficie gaussiana esférica de radio r concéntrica a la esfera cargada de radio a. (Ver figura)

Aplicando entonces la expresión $$\oiint_{SC} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (1)$$

Para este caso particular, se puede interpretar que toda la carga está concentrada en el centro de la esfera cargada (por la simetría) y que por lo tanto, la dirección del campo eléctrico es radial y resulta paralela al $d\vec{S}$ de la superficie gaussiana, entonces:

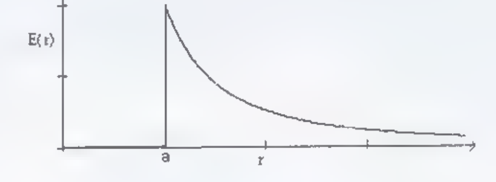
$$\oiint_{SC} E \cos(0)\, dS = \oiint_{SC} E\, dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (2)$$

Como la intensidad del campo eléctrico en el vacío, en general, depende de la carga que lo genera y la distancia entre esa carga y el punto, en este ejemplo la carga es constante y la distancia a cualquier punto de la superficie gaussiana también lo es, esto significa que el módulo del campo en cualquier punto de la superficie gaussiana es constante, independiente de dS. De lo anterior surge que es posible extraer de la integral de superficie a E

$$E \oiint_{SC} dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3)$$

integrando, sobre la superficie gaussiana esférica de radio r resulta

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (4)$$



entonces el módulo del campo eléctrico para una esfera con carga Q y radio a en puntos $r \geq a$ resulta

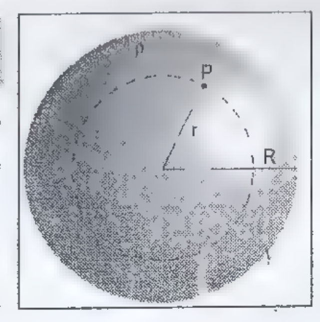
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_o r^2}, \text{ para } r \geq a \qquad (5)$$

y su dirección es radial.

La gráfica del módulo del campo eléctrico como función de r presenta una discontinuidad en r = a. ¿Qué conclusión puede obtenerse?

PROBLEMA 9

Calcular del campo eléctrico creado por una distribución de cargas con simetría esférica de radio R y densidad volumétrica constante ρ. La carga total es Q



Se usará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en todos los puntos, esto es, para $r \leq R$ y $r \geq R$, para eso se **elige** una superficie gaussiana esférica concéntrica a la carga, considerando que su distribución es uniforme.

a) Análisis para r ≤ R

Una superficie gaussiana esférica de radio r (ver figura) tal que cumpla con $r \leq R$ contendrá la carga Q'

$$Q' = \int_{V'} \rho dV = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \qquad (1)$$

empleando Gauss, recordando que solo interesa la carga dentro de la superficie gaussiana, se tiene

$$\oiint_{SC} \vec{E}\, \vec{dS} = \frac{Q'}{\varepsilon_o} \qquad (2)$$

y como la superficie gaussiana es esférica y concéntrica a la distribución entonces $\vec{E}$ y $\vec{dS}$ son paralelos, la (2) se puede escribir

$$\oiint_{SC} E\, dS = \frac{4}{3\varepsilon_o}\pi r^3 \rho \qquad (3)$$

usando los mismos argumentos del caso anterior, se extrae el campo de la integral y se integra sobre toda la superficie

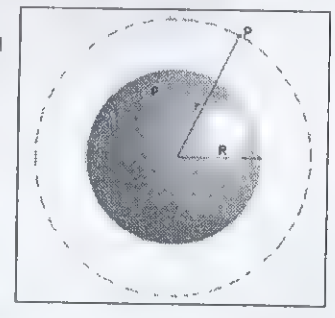
$$E\, 4\pi r^2 = \frac{4}{3\varepsilon_o}\pi r^3 \rho \qquad (4)$$

haciendo la reducciones posibles y despejando el campo resulta

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o} \qquad (5)$$

Esta expresión de campo es válida para r ≤ R.

b) Análisis para r ≥ R



Una superficie gaussiana esférica de radio r (ver figura) tal que cumpla con r ≥ R, contendrá a TODA la carga Q, entonces

$$Q = \int_{V} \rho dV = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \qquad (6)$$

empleando Gauss

$$\oiint_{SC} \vec{E}\, \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (7)$$

y como la superficie gaussiana es esférica y concéntrica a la distribución entonces $\vec{E}$ y $\vec{dS}$ son paralelos, la (7) se puede escribir

$$\oiint_{SC} E\, dS = \frac{4}{3\varepsilon_o}\pi R^3 \rho \qquad (8)$$

usando los mismos argumentos del caso anterior, se extrae el campo de la integral e integrando sobre toda la superficie

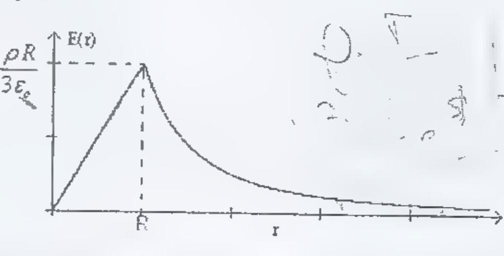
$$E\, 4\pi r^2 = \frac{4}{3\varepsilon_o}\pi R^3 \rho \qquad (9)$$

despejando el campo

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2} \qquad (10)$$

Esta expresión de campo es válida para r ≥ R

Entonces, haciendo un resumen el campo eléctrico resulta



$$L(r)=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_o} & r\le R\\[2mm] \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2} & r\ge R\end{cases}\qquad (11)$$

Obsérvese que si r → R entonces $E(R)=\dfrac{\rho R}{3\varepsilon_o}$

¿A qué le atribuye el hecho que en el interior de la distribución de carga el módulo del campo eléctrico crece linealmente?

PROBLEMA 10

Calcular el campo eléctrico creado por una distribución de cargas con simetría esférica de radio R y densidad volumétrica ρ(r) = A.r, con 0 ≤ r ≤ R y A es una constante.

Se usará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en todos los puntos esto es para r ≤ R y r ≥ R, para eso se **elige** una superficie gaussiana esférica concéntrica a la carga, considerando la simetría radial de la misma ρ(r) = A.r.

a) Análisis para r ≤ R

Una superficie gaussiana esférica de radio r tal que cumpla con r ≤ R contendrá la carga Q'

$$Q'=\int_{V'}\rho dV=\int_0^r(Ar')4\pi r'^2dr'=4\pi A\int_0^r r'^3dr'=4\pi A\frac{r^4}{4}=\pi A r^4\qquad (1)$$

empleando Gauss, recordando que solo interesa la carga dentro de la superficie gaussiana, se tiene

$$\oint\!\!\oint_{SC}\vec{E}\,\vec{dS}=\frac{Q'}{\varepsilon_o}\qquad (2)$$

y como la superficie gaussiana es esférica y concéntrica a la distribución entonces $\vec{E}$ y $\vec{dS}$ son paralelos, la (2) se puede escribir

$$\oint\!\!\oint_{SC}E\,dS=\frac{\pi A r^4}{\varepsilon_o}\qquad (3)$$

usando los mismos argumentos del caso anterior, se extrae el campo de la integral e integrando sobre toda la superficie

$$E\,4\pi r^2=\frac{\pi A r^4}{\varepsilon_o}\qquad (4)$$

haciendo la reducciones posibles y despejando el campo resulta

$$E(r)=\frac{Ar^2}{4\,\varepsilon_o}\qquad (5)$$

Esta expresión de campo es válida para r ≤ R.

b) Análisis para r ≥ R

Una superficie gaussiana esférica de radio r tal que cumpla con r ≥ R, contendrá a TODA la carga Q, entonces

$$Q = \int_V \rho dV = \int_0^R (Ar')4\pi r'^2 dr' = \pi A R^4 \qquad (6)$$

empleando Gauss

$$\oiint_{SC} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (7)$$

y como la superficie gaussiana es esférica y concéntrica a la distribución entonces $\vec{E}$ y $\vec{dS}$ son paralelos, la (7) se puede escribir

$$\oiint_{SC} E\, dS = \frac{\pi A R^4}{\varepsilon_o} \qquad (8)$$

usando los mismos argumentos del caso anterior, extraemos el campo de la integral e integramos sobre toda la superficie

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{\pi A R^4}{\varepsilon_o} \qquad (9)$$

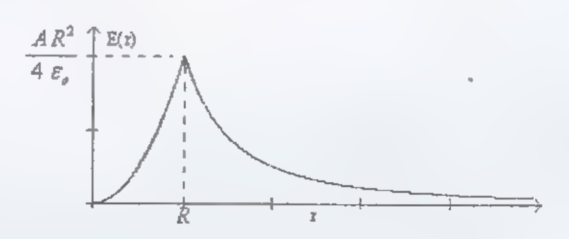
despejando el campo

$$E(r) = \frac{A R^4}{4 \varepsilon_o r^2} \qquad (10)$$

Esta expresión de campo es válida para $r \geq R$

Entonces, realizando un resumen, el campo eléctrico está dado por

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{A r^2}{4\, \varepsilon_o} & r \leq R \\ \\ \dfrac{A R^4}{4 \varepsilon_o r^2} & r \geq R \end{cases} \qquad (11)$$



Obsérvese que si $r \rightarrow R$ $\quad E(R) = \dfrac{A R^2}{4\, \varepsilon_o}$

PROBLEMA 11

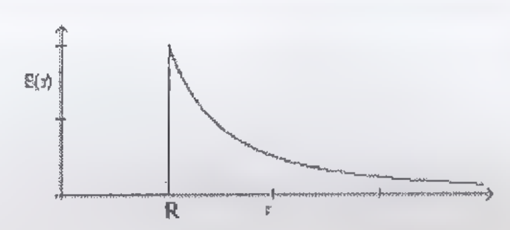
En los problemas 8, 9 y 10 se calculó el campo eléctrico creado por distribuciones de cargas con simetrías esférica para los casos:

1. Una esfera conductora cargada
2. Una distribución esférica con densidad de carga constante
3. Una distribución esférica con densidad de carga variable constante $\rho(r) = A.r$, con $0 \le r \le R$

Compare las expresiones de estos campos y saque conclusiones.

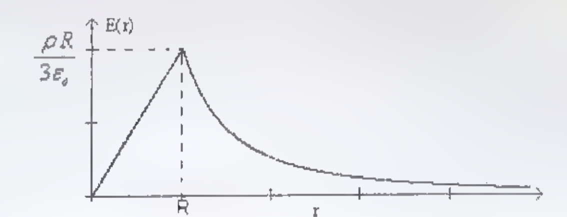
Esfera conductora cargada

$$E(r)=\begin{cases} 0 & r<R \\ \dfrac{Q}{4\varepsilon_o \pi r^2} & r\ge R \end{cases}$$



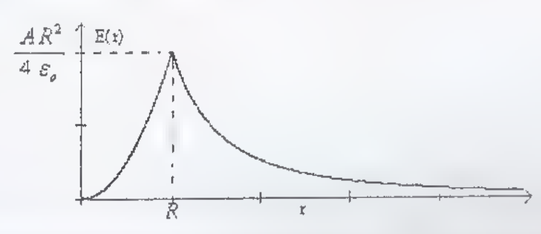
Distribución esférica con densidad de carga constante

$$E(r)=\begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_o} & r\le R \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2} & r\ge R \end{cases}$$



Distribución esférica con densidad de carga variable constante $\rho(r) = A.r$, con $0 \le r \le R$

$$E(r)=\begin{cases} \dfrac{Ar^2}{4\,\varepsilon_o} & r\le R \\ \dfrac{AR^4}{4\varepsilon_o r^2} & r\ge R \end{cases}$$



Para r < R en la esfera conductora el campo eléctrico es nulo, mientras que para las distribuciones de carga no lo es y depende de cómo es la distribución, si la distribución tiene densidad constante el campo depende linealmente de r , mientras que si la densidad de carga es proporciona a r , el campo dependerá en forma cuadrática.

Para r > R
En todos los casos tienen el mismo comportamiento, dependen de la inversa del cuadrado de la distancia ($1/r^2$)

En r = R En la esfera conductora cargada la función E(r) es discontinua, mientras que en los otros casos son continuas pero no su derivada.

PROBLEMA 12

En el interior de una región esférica de radio R existe una distribuida una densidad de carga $\rho(r) = A/r$, con $0 \leq r \leq R$ y A es una constante. Determine el valor de la constante A si la carga total es Q y el campo eléctrico para $r \leq R$ y para $r \geq R$.

Cálculo de la constante A considerando toda la región esférica de radio R

$$Q = \int_V \rho dV = \int_0^R \left(\frac{A}{r'}\right) 4\pi r'^2 dr' = 4\pi A \int_0^R r' dr' = 4\pi A \frac{R^2}{2} = 2\pi A R^2 \qquad (1)$$

entonces $A = \dfrac{Q}{2\pi R^2}$ (2)

Cálculo del campo eléctrico

Se usará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en todos los puntos esto es para $r \leq R$ y $r \geq R$, para eso se **elige** una superficie gaussiana esférica concéntrica a la carga, considerando la simetría radial de la misma $\rho(r) = A/r$.

Análisis para r ≤ R

Una superficie gaussiana esférica de radio r tal que cumpla con $r \leq R$ contendrá la carga Q'

$$Q' = \int_{V'} \rho dV = \int_0^r \left(\frac{A}{r'}\right) 4\pi r'^2 dr' = 4\pi A \int_0^r r' dr' = 4\pi A \frac{r^2}{2} = 2\pi A r^2 \qquad (3)$$

empleando Gauss, recordando que solo interesa la carga dentro de la superficie gaussiana, se tiene

$$\oint\!\!\!\oint_{SC} \vec{E}\, \vec{dS} = \frac{Q'}{\varepsilon_o} \qquad (4)$$

y como la superficie gaussiana es esférica y concéntrica a la distribución entonces $\vec{E}$ y $\vec{dS}$ son paralelos, la (2) se puede escribir

$$\oint\!\!\!\oint_{SC} E\, dS = \frac{2\pi A r^2}{\varepsilon_o} \qquad (5)$$

usando los mismos argumentos del caso anterior, se extrae el campo de la integral e integrando sobre toda la superficie

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{2\pi A r^2}{\varepsilon_o} \qquad (6)$$

haciendo la reducciones posibles y despejando el campo resulta

$$E(r) = \frac{A}{2\,\varepsilon_o} \qquad (7)$$

Esta expresión de campo es válida para $r \leq R$.

Análisis para r ≥ R

Una superficie gaussiana esférica de radio r tal que cumpla con $r \geq R$, contendrá a TODA la carga Q, entonces

$$Q=\int_V \rho dV=\int_0^R\left(\frac{A}{r'}\right)4\pi r'^2dr'=2\pi AR^2 \qquad (8)$$

empleando Gauss

$$\oint\!\!\!\oint_{SC}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (9)$$

y como la superficie gaussiana es esférica y concéntrica a la distribución entonces $\vec{E}$ y $d\vec{S}$ son paralelos, la (7) se puede escribir

$$\oint\!\!\!\oint_{SC}E\ dS=\frac{2\pi AR^2}{\varepsilon_o} \qquad (10)$$

usando los mismos argumentos del caso anterior, extraemos el campo de la integral e integramos sobre toda la superficie

$$E\,4\pi r^2=\frac{2\pi AR^2}{\varepsilon_o} \qquad (11)$$

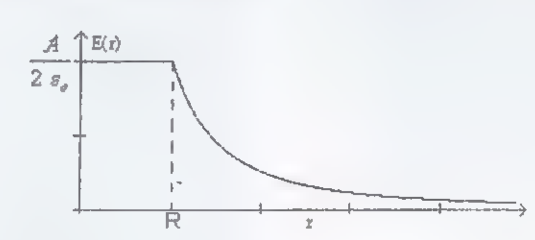
despejando el campo

$$E(r)=\frac{AR^2}{2\varepsilon_o r^2} \qquad (12)$$

Esta expresión de campo es válida para r ≥ R

Entonces, realizando un resumen, el campo eléctrico está dado por

$$E(r)=\begin{cases}\dfrac{A}{2\,\varepsilon_o} & r\le R\\[2mm] \dfrac{AR^2}{2\varepsilon_o r^2} & r\ge R\end{cases} \qquad (13)$$



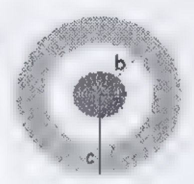
Obsérvese que si r → R $\quad E(R)=\dfrac{A}{2\,\varepsilon_o}$

PROBLEMA 13

Una esfera sólida de radio a tiene una densidad de carga ρ y una carga total Q. Concéntrica con esta esfera hay una esfera hueca conductora, no cargada, de radio interno b y radio externo c, como muestra la figura

a) Determine la carga inducida en las superficies interna y externa de la esfera hueca

b) Determine la intensidad del campo eléctrico en las regiones r ≤ a, a ≤ r ≤ b, b ≤ r ≤ c y r ≥ c.

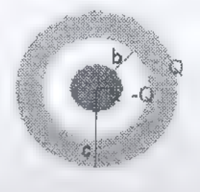


a) **Distribución de la carga**

La carga eléctrica inducida:

- -Q en la superficie interior de radio b, las líneas del campo parten radialmente de la esfera de radio a y alcanzan la superficie interior de la esfera conductora hueca, radio b. La cual por ser conductora y estar condiciones estáticas, en su interior, el campo es nulo
- +Q en la superficie exterior de radio c

b) Cálculo de la intensidad del campo eléctrico

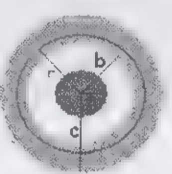


Para r ≤ a y a ≤ r ≤ b

Usando el resultado del problema 9 se tiene

$$E_1(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o} \qquad r \le a$$

$$E_2(r) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_o\, r^2} \qquad a \le r < b$$

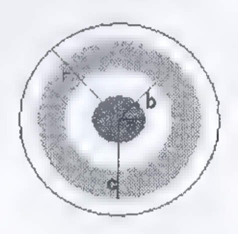


Para b ≤ r ≤ c

Como la carga neta encerrada es cero, el flujo eléctrico es nulo y por lo tanto en el interior del conductor el campo es nulo

$$E_3(r) = 0 \qquad b \le r \le c$$

Para r ≥ c



Se usará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en puntos que cumplan r ≥ c, para eso se **elige** una superficie gaussiana esférica de radio r concéntrica a los conductores La carga que se tendrá en cuenta es la carga contenida en la superficie esférica a, la carga –Q que está en r = b y la carga Q en r = c

Entonces la expresión

$$\oiint_{SC} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho - Q + Q}{\varepsilon_o} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho}{\varepsilon_o}$$

Para este caso particular, se puede interpretar que toda la carga está concentrada en el centro de la esfera cargada (por la simetría) y que por lo tanto, la dirección del campo eléctrico es radial y resulta paralela al $\vec{dS}$ de la superficie gaussiana, entonces:

$$\oiint_{SC} E\cos(0)\, dS = \oiint_{SC} E\, dS = \frac{4}{3\varepsilon_o}\pi a^3 \rho$$

Como la intensidad del campo eléctrico en el vacío, en general, depende de la carga que lo genera y la distancia entre esa carga y el punto, en este ejemplo la carga es constante y la distancia a cualquier punto de la superficie gaussiana también lo es, esto significa que el módulo del campo en cualquier punto de la superficie gaussiana es constante, independiente de dS. De lo anterior surge que es posible extraer de la integral de superficie a E

$$/ \; E \oiint_{sc} dS = \frac{4}{3\varepsilon_o}\pi a^3 \rho$$

integrando, sobre la superficie gaussiana esférica de radio r resulta

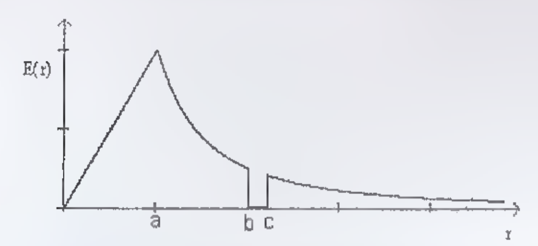
$$E \, 4\pi r^2 = \frac{4}{3\varepsilon_o}\pi a^3 \rho$$

entonces el módulo del campo eléctrico en puntos r ≥ c resulta

$$E(r) = \frac{a^3}{3\varepsilon_o}\frac{\rho}{r^2}, \text{ para } r \geq c$$

y su dirección es radial.

La representación gráfica es



Obsérvese como la presencia del cascarón conductor produce una discontinuidad en el campo eléctrico.

PROBLEMA 14

Considere un cascarón metálico esférico con carga Q, de radio interior R_1 y de radio exterior R_2, empleando la ley de Gauss establezca cómo se distribuye la carga y determine el campo eléctrico E(r) en todos los puntos.

LEY DE GAUSS $\displaystyle \oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_o}\iiint_{Vol} \rho \cdot dv$ (1)

Si tomamos una superficie esférica concéntrica al cascarón de radio r_1 tal que $R_1 \leq r_1 \leq R_2$
Como el campo eléctrico en el interior del conductor es nulo, la primera integral de la identidad (1) se anula y por lo tanto, no hay carga en esa región, la carga debe depositarse solo sobre la superficie exterior del cascarón, es decir está en $r = R_1$.
Podemos hablar entonces de una densidad superficial de carga

$$\sigma = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot R_2^2}$$

El campo eléctrico, entonces será nulo para todo $r_1 < R_2$ $E_1 = 0$

El campo eléctrico para $r_1 \geq R_2$
Se calcula empleando (1) donde $dS = 8 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$

Si E = constante para cada punto de la superficie de la esfera de radio r_1. La integral del primer miembro de la identidad (1)

$$\int_0^{r_1} E\cdot 8\cdot\pi\cdot r\cdot dr = E\cdot 4\cdot\pi\cdot r_1^2$$

La integral del segundo miembro de la identidad (1), se refiere a la carga contenida, en la superficie esférica de radio r_1, que es justamente Q.

Reemplazando en (1)

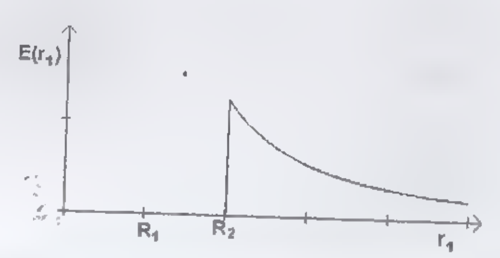
$$E\cdot 4\cdot\pi\cdot r_1^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Entonces

$$E = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot r_1^2} \qquad r_1 \geq R$$

Representación gráfica del campo eléctrico en función en función de la distancia r_1

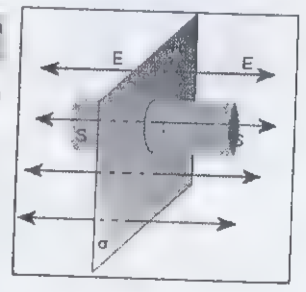
$$E(r_1) = \begin{cases} 0 & r_1 < R_2 \\ \dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot r^2} & r_1 \geq R_2 \end{cases}$$



En la gráfica se observa como el campo es nulo mientras que r_1 es menor que R_2, luego, decrece con la inversa del cuadrado de la distancia. En la superficie de la esfera existe una discontinuidad.

PROBLEMA 15

Calcule el campo eléctrico debido a una lámina plana, conductora, infinita y cargada.



Si la carga neta q está distribuida uniformemente entonces su densidad superficial es constante σ

El campo eléctrico es normal al plano de la lámina y saliente, la superficie gaussiana que se debe elegir tiene que respetar la simetría y en esta superficie el campo debe ser constante y su dirección paralela al elemento diferencial de superficie, entonces la superficie elegida es un cilindro de sección S, colocado de modo que sus tapas queden a ambos lados de la lámina a la misma distancia, como muestra la figura.

Aplicando entonces la expresión

$$\oiint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (1)$$

donde Q es la carga contenida por el cilindro esto es Q = σ S.

La integral se puede escribir

$$\oiint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = \iint_{SL} E\cos(90°)\,dS + \iint_{ST1} E\cos(0°)\,dS + \iint_{ST2} E\cos(0°)\,dS$$

de donde

$$\oiint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = 2\iint_{ST1} E\cos(0°)\,dS = 2\,E\,S$$

entonces

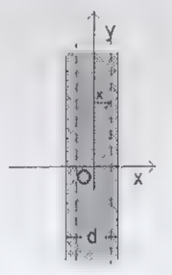
$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_o}$$ Despejando el campo $$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

El campo a ambos lados de la lámina es el mismo y es constante, esto es, no depende de la posición respecto de la lámina.

PROBLEMA 16

Una placa de material aislante de espesor d tiene una densidad de carga uniforme positiva ρ, como muestra la figura a) Demuestre que el campo eléctrico a una distancia x de su centro y dentro de la placa es $E = \rho x / \varepsilon_0$. b) Suponga que un electrón de carga -e y masa m se coloca sin velocidad dentro de la placa a una distancia x del centro, demuestre que el electrón tendrá un movimiento armónico simple con frecuencia dada por

$$f = \frac{1}{2\cdot\pi}\sqrt{\frac{\rho\cdot e}{m\cdot\varepsilon_o}}$$



Ley de Gauss

$$\oiint_{SC} \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\iiint_{Vol} \rho\, dV$$

Por la simetría de la distribución el campo eléctrico solo tendrá componente en el eje x, entonces

$$2EYZ = \frac{2\rho YZx}{\varepsilon_o}$$ resulta $$E = \frac{\rho x}{\varepsilon_o}$$

La fuerza sobre el electrón es $F = -eE = -\frac{e\rho x}{\varepsilon_o}$

Según la segunda ley de Newton resulta

$$m_e\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{e\rho x}{\varepsilon_o} \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{e\rho x}{m_e\varepsilon_o} = 0$$

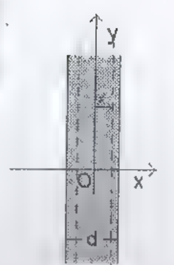
que corresponde a una ecuación diferencial semejante a la de una partícula como movimiento armónico simple, con pulsación ω dada por

$$\omega^2 = \frac{e\rho x}{m_e\varepsilon_o}$$ Entonces la frecuencia es $$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e\rho x}{m_e\varepsilon_o}}$$

La partícula oscila con esa frecuencia, respecto del eje vertical

PROBLEMA 17

Una placa de material aislante tiene una densidad de carga positiva no uniforme dada por $\rho(x) = C\,x^2$ donde x se mide desde el centro de la placa como muestra la figura y C es una constante. La placa es infinita en las direcciones y y z. Deduzca la expresión del campo eléctrico dentro y fuera de la placa.



Por la simetría de la distribución el campo eléctrico solo tendrá componente en el eje x, entonces,

Para el interior de la placa es decir $-\dfrac{d}{2} \le x \le \dfrac{d}{2}$

$$2 \cdot E \cdot Y \cdot Z = \frac{1}{\varepsilon_o} \cdot Y \cdot Z \cdot \int_{-x}^{x} C \cdot X^2 dX$$

Eliminando Y, Z y haciendo la integral resulta

$$E = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_{-x}^{x} C \cdot X^2 dX = \frac{C \cdot x^3}{3 \cdot \varepsilon_o}$$

$$E(x) = \frac{C \cdot x^3}{3 \cdot \varepsilon_o} \quad para \quad -\frac{d}{2} \le x \le \frac{d}{2}$$

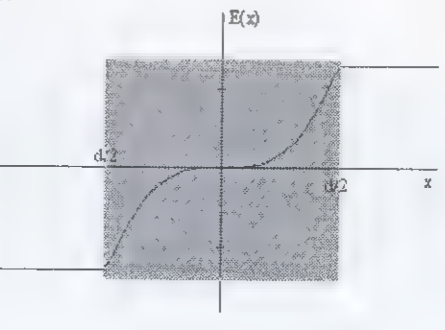
El módulo campo para el exterior de la placa, $x \ge \left|\dfrac{d}{2}\right|$

$$2 \cdot E \cdot Y \cdot Z = \frac{1}{\varepsilon_o} \cdot Y \cdot Z \cdot \int_{-d/2}^{d/2} C \cdot X^2 dX$$

$$E = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_{-d/2}^{d/2} C \cdot X^2 dX = \frac{C \cdot d^3}{24 \cdot \varepsilon_o} \quad para \quad x \ge \left|\frac{d}{2}\right|$$

Representación gráfica del campo

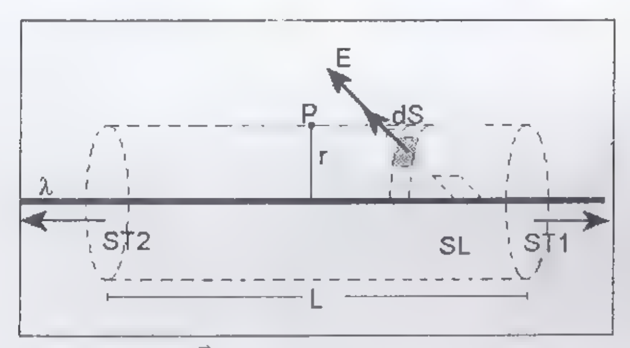
$$E(x) = \begin{cases} -\dfrac{C \cdot d^3}{24 \cdot \varepsilon_o} & x < -\dfrac{d}{2} \\ \dfrac{C \cdot x^3}{3 \cdot \varepsilon_o} & -\dfrac{d}{2} \le x \le \dfrac{d}{2} \\ \dfrac{C \cdot d^3}{24 \cdot \varepsilon_o} & x > \dfrac{d}{2} \end{cases}$$



Se observa que dentro de la placa el campo depende de la posición en forma cúbica, afuera es constante.

PROBLEMA 18

Empleando la ley de Gauss determinar el campo eléctrico producido por un hilo muy largo con densidad de carga uniforme λ.



Para determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en puntos que cumplan r ≥ a, se **elige** una superficie gaussiana cilíndrica de radio r concéntrica al hilo cargado. (Ver figura)

Aplicando entonces la expresión

$$\oiint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (1)$$

Para este caso particular, debido a que se considera un hilo muy largo, se puede asumir que la dirección del campo es radial y resulta paralela al $\vec{dS}$ de la superficie gaussiana lateral (SL) del cilindro gaussiano, mientras que para las tapas (ST1 y ST2) del mismo, la dirección del campo es perpendicular, (ver figura) entonces

$$\oiint_{SC} \vec{E}\,\vec{dS} = \iint_{SL} E\cos(0)\,dS + \iint_{ST1} E\cos(90^\circ)\,dS + \iint_{ST2} E\cos(90^\circ)\,dS \qquad (2)$$

de donde surge que

$$\iint_{SL} E\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3)$$

Como la intensidad del campo eléctrico en el vacío, en general, depende de la carga que lo genera y la distancia entre esa carga y el punto, en este ejemplo, la carga es constante y la distancia a cualquier punto de la superficie gaussiana también lo es, esto significa que el módulo del campo en cualquier punto de la superficie gaussiana es constante, independiente de $\vec{dS}$. De lo anterior surge que es posible extraer de la integral de superficie a E

$$E\iint_{SL} dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (4)$$

integrando, sobre la superficie SL gaussiana resulta

$$E\,2\pi rL = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (5)$$

donde L representa una longitud arbitraria del hilo cargado, despejando el campo

$$E = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon_o r} \qquad (6)$$

Si $\frac{Q}{L} = \lambda$ entonces el módulo del campo eléctrico para un hilo con densidad lineal de carga λ resulta

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r} \qquad (7)$$

su dirección es radial y su sentido hacia fuera.

PROBLEMA 19

Determine el campo eléctrico E(r) creado por una distribución cilíndrica de carga de radio R, con densidad de carga ρ constante y muy larga, para r ≤ R y r ≥ R.

Aplicando entonces la expresión de la ley de Gauss

$$\oiint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_o}\iiint_{Vol} \rho\cdot dv \qquad (1)$$

Para r ≤ R

Si L es la longitud del cilindro. Para el análisis solo se considera la superficie lateral del cilindro, entonces

$dS = 2\cdot\pi\cdot L\cdot dr \qquad dv = 2\cdot\pi\cdot r\cdot L\cdot dr$

Si E = constante para cada punto de la superficie lateral del cilindro de radio r La integral del primer miembro de la identidad (1)

$$\int^{r} E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot dr = E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot r$$

La integral del segundo miembro de la identidad (1)

$$\int_0^{r} \rho\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot L\cdot dr - \rho\cdot\pi\cdot L\cdot r^2$$

Reemplazando en (1) $E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot r = \frac{\rho\cdot\pi\cdot L\cdot r^2}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{\rho\cdot r}{2\cdot\varepsilon_o} \quad r \leq R$

Para r ≥ R

Usamos (1) de nuevo, donde las expresiones de los diferenciales de superficie y volumen son los mismos, si E = constante para cada punto del superficie lateral del cilindro de radio r_1

La integral del primer miembro de la identidad (1)

$$\int_0^{r} E\ 2\cdot\pi\cdot L\cdot dr - E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot r$$

La integral del segundo miembro de la identidad (1), debe hacerse solo hasta donde se encuentra la carga, es decir R

$$\int_0^R \rho \cdot 2\pi \cdot r\, L\, dr \rightarrow R^2 \cdot \rho\, \pi \cdot L \quad \int_0^R \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot dr = \rho \cdot \pi \cdot L \cdot R^2$$

Reemplazando en (1) $E \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot r = \dfrac{\rho \cdot \pi \cdot L \cdot R^2}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \dfrac{\rho \cdot R^2}{2 \cdot \varepsilon_o \cdot r} \quad r \geq R$

Representación gráfica del campo eléctrico en función de la distancia

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho \cdot r}{2 \cdot \varepsilon_o} & r \leq R \\ \dfrac{\rho \cdot R^2}{2 \cdot \varepsilon_o \cdot r} & r \geq R \end{cases}$$

E(r)

R

r

En la gráfica se observa como el campo crece linealmente mientras que r es menor que R, luego decrece con la inversa de la distancia. En la superficie del cilindro ambos campos son iguales.

PROBLEMA 20

Dada una distribución cilíndrica de carga de radio R y densidad de carga ρ(r) = A/r con A constante, determine el campo eléctrico E(r) creado por una para r ≤ R y para r ≥ R. La longitud de la distribución es muy grande.

LEY DE GAUSS $\oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_o} \iiint_{Vol} \rho \cdot dv$ (1)

Donde $dS = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot dr$ $dv = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot dr$

Para r ≤ R

Si E = constante para cada punto de la superficie de la esfera de radio r. La integral del primer miembro de la identidad (1)

$$\int_0^r E \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot dr = E \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot r$$

La integral del segundo miembro de la identidad (1)

$$\int_0^r \rho(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot dr = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \int_0^r \frac{A}{r} \cdot r \cdot dr = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot A \cdot r$$

Reemplazando en (1) $E \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot r = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot A \cdot r}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \dfrac{A}{\varepsilon_o}$ $para \quad r \leq R$

Para r ≥ R

Usamos (1) de nuevo, donde las expresiones de los diferenciales de superficie y volumen son los mismos. Si E = constante para cada punto de la superficie de la esfera de radio r_1

La integral del primer miembro de la identidad (1)

$$\int_0^r E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot dr = E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot r$$

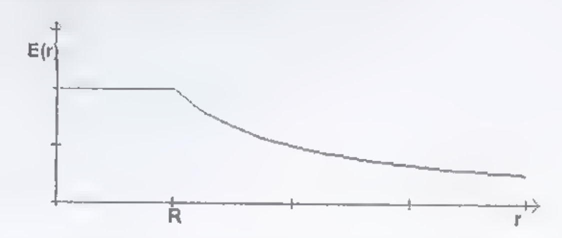
La integral del segundo miembro de la identidad (1)) debe hacerse solo hasta donde se encuentra la carga, es decir R

$$\int_0^R \rho(r)\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot L\cdot dr = 2\cdot\pi\cdot L\cdot\int_0^R \frac{A}{r}\cdot r\cdot dr = 2\cdot\pi\cdot L\cdot A\cdot R$$

Reemplazando en (1) $\qquad E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot r = \dfrac{A}{\varepsilon_o}\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot R \;\Rightarrow\; E = \dfrac{A}{\varepsilon_o}\cdot\dfrac{R}{r} \qquad r \geq R$

Representación gráfica del campo eléctrico en función de la distancia

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{A}{\varepsilon_o} & r \leq R \\ \dfrac{A}{\varepsilon_o}\cdot\dfrac{R}{r} & r \geq R \end{cases}$$



En la gráfica se observa como el campo es constante mientras que r es menor que R luego, decrece con la inversa de la distancia En la superficie del cilindro ambos campos son iguales. E(r) no es una función continua.

PROBLEMA 21

En el interior de una región cilíndrica de radio R existe distribuida una densidad de carga $\rho(r) = A\cdot r$ donde A es una constante y $0 \leq r < R$, determine e valor de A si la carga total es Q y el campo eléctrico E(r) para $r \leq R$ y para $r \geq R$. Suponer que la región bajo estudio es muy larga.

LEY DE GAUSS $\qquad \oiint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \dfrac{1}{\varepsilon_o}\iiint_{Vol}\rho\cdot dv \qquad (1)$

Donde $\qquad dS = 2\cdot\pi\cdot L\cdot dr \qquad dv = 2\cdot\pi\cdot r\cdot L\cdot dr$

Cálculo de la constante A, si la carga total es Q

$$\int_{Vol}\rho(r)\cdot dv = Q$$

$$2\cdot\pi\cdot L\cdot\int_0^R (A\cdot r)\cdot r\cdot dr = 2\cdot\pi\cdot L\cdot A\cdot\frac{R^3}{3} = Q \quad\Rightarrow\quad A=\frac{3\cdot Q}{2\cdot\pi\cdot L\cdot R^3}$$

Para r ≤ R

Si E = constante eb cada punto de la superficie de la esfera de radio r. La integral del primer miembro de la identidad (1)

$$\int_0^r E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot dr = E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot r$$

La integral del segundo miembro de la identidad (1)

$$\int_0^r \rho(r)\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot L\cdot dr = 2\cdot\pi\cdot L\cdot\int_0^r (A\cdot r)\cdot r\cdot dr = 2\cdot\pi\cdot L\cdot A\cdot\frac{r^3}{3}$$

Reemplazando en (1) $\quad E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot r=\dfrac{2\cdot\pi\cdot L\cdot A\cdot r^3}{3\cdot\varepsilon_o} \Rightarrow E=\dfrac{A\cdot r^2}{3\cdot\varepsilon_o} \quad para \quad r\le R$

Para r ≥ R

Usamos (1) de nuevo, donde las expresiones de los diferenciales de superficie y volumen son los mismos.
Si E = constante en cada punto de la superficie de la esfera de radio r
La integral del primer miembro de la identidad (1)

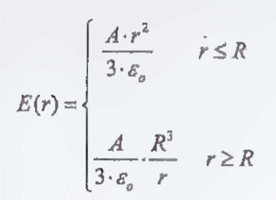
$$\int_0^r E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot dr = E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot r$$

La integral del segundo miembro de la identidad (1)) debe hacerse solo hasta donde se encuentra la carga, es decir R

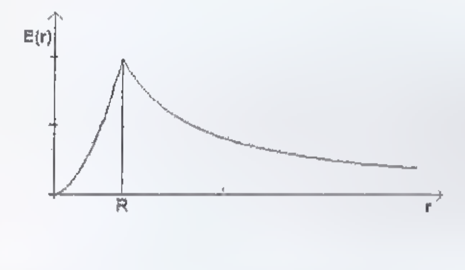
$$\int_0^R \rho(r)\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot L\cdot dr = 2\cdot\pi\cdot L\cdot\int_0^R (A\cdot r)\cdot r\cdot dr = 2\cdot\pi\cdot L\cdot A\cdot\frac{R^3}{3}$$

Reemplazando en (1) $\quad E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot r=\dfrac{1}{\varepsilon_o}\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot A\cdot\dfrac{R^3}{3} \Rightarrow E=\dfrac{A}{3\cdot\varepsilon_o}\cdot\dfrac{R^3}{r} \quad r\ge R$

Representación gráfica del campo eléctrico en función de la distancia



$$E(r)=\begin{cases}\dfrac{A\cdot r^2}{3\cdot\varepsilon_o} & r\le R\\[2ex] \dfrac{A}{3\cdot\varepsilon_o}\cdot\dfrac{R^3}{r} & r\ge R\end{cases}$$



En la gráfica se observa como el campo es proporcional al cuadrado de la distancia mientras que r es menor que R luego, decrece con la inversa de la distancia En la superficie del cilindro ambos campos son iguales. E(r) no es una función continua.

PROBLEMA 22

Un cilindro conductor de radio R_1 con carga Q está rodeado por un conductor hueco de radio interior R_2 y radio exterior R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$) Determine el campo eléctrico E(r) para $r \leq R_1$, $R_1 \leq r \leq R_2$, $R_3 \leq r \leq R_3$ y para $r \geq R_3$. Suponer que ambos conductores son muy largos.

LEY DE GAUSS $\oiint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_o}\iiint\limits_{Vol} \rho \cdot dv$ (1) Donde $dS = 2\cdot\pi\cdot L\cdot dr$ $\qquad dv = 2\cdot\pi\cdot r\cdot L\cdot dr$

La carga en un conductor en condiciones estáticas está localizada en la superficie. La carga Q en la superficie de radio R_1 induce una carga -Q en la superficie interior de radio R_2 del cilindro conductor hueco y una carga +Q en la cubierta externa de radio R_3.

Para $r < R_1$ Por ser conductor y en condiciones estáticas, la carga Q está localizada en la superficie de radio R_1 por lo tanto según (1)

$$\oiint_S \vec{E}\,d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$ el campo es nulo para $r < R_1$

Para $R_1 \leq r \leq R_2$

Aplicando (1) y la carga neta encerrada por la superficie gaussiana y que pasa por r es la carga Q, entonces la (1)se expresa como $\oiint \overline{E}\cdot\overline{dS} = \dfrac{Q}{\varepsilon_o}$ (2)

donde para el cilindro se tiene $\oiint \vec{E}\,d\vec{S} = E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot r$ reemplazando (2)

$$E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot r = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot L\cdot r} = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot r}$$ para $R_1 \leq r \leq R_2$

Para $R_2 < r < R_3$ El cilindro hueco también es conductor, por lo tanto,

$$\oiint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q-Q}{\varepsilon_o} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$ el campo es nulo para $R_2 < r < R_3$

Para $R_3 \leq r$ Aplicando (1) y la carga neta encerrada por la superficie gaussiana y que pasa por r es la carga Q – Q + Q, entonces la (1)se expresa como

$$\oiint \overline{E}\cdot\overline{dS} = \frac{Q-Q+Q}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad (3)$$ donde para el cilindro se tiene $\oiint \vec{E}\,d\vec{S} = E\cdot 2\;\pi\cdot L\cdot r$

reemplazando (3) $E\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot r = \dfrac{Q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{Q}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot L\cdot r} = \dfrac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot r}$ para $R_3 \leq r$

Resumiendo

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot r} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_o\cdot r} & r \leq R_3 \end{cases}$$

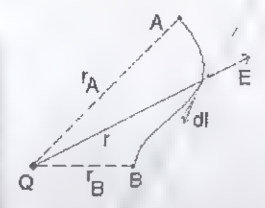
E(r)
R1 R2 R3 r

CAPITULO VI: POTENCIAL ELECTRICO

PROBLEMA 1

a) Calcule la diferencia de potencial entre los puntos A y B pertenecientes a una región donde existe un campo eléctrico creado por una carga puntual (ver figura).

b) Suponiendo que el punto A está infinitamente lejos de la carga Q, ¿cuál sería la diferencia de potencial entre ese punto y el punto B? Analizando este resultado represente gráficamente los puntos del espacio que tengan igual la diferencia de potencial.



Definición de diferencia de potencial

$$V(r_B)-V(r_A)=-\int_{r_A}^{r_B}\vec{E}\cdot\vec{dl}=-\int_{r_A}^{r_B}E\cos(\theta)\,dl \qquad (1)$$

---

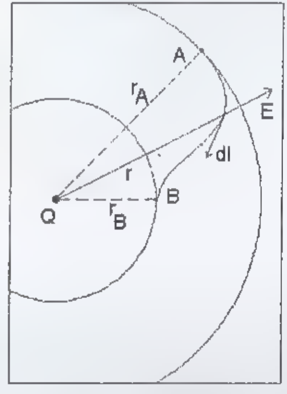
a) Si en la región hay una carga puntual Q entonces existe un campo eléctrico dado por

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}\vec{r}_o$$

Considerando la proyección de dl sobre r se tiene cos(θ) dl = dr .

Entonces (1) se puede escribir

$$V(r_B)-V(r_A)=-\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}\vec{r}_o\cdot\vec{dl}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$



La diferencia de potencial entre los puntos A y B

$$V(r_B)-V(r_A)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right]$$

b) Si el punto A esta infinitamente lejos entonces

$$\lim_{r_A\to\infty}\left[V(r_B)-V(r_A)\right]=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_B}\right]$$

Es posible asumir que el valor de potencial eléctrico en Va se puede tomar como referencia e igual a cero

$$V(r_B)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_B}\right]$$

En la figura se dibujaron dos circunferencias, una de radio r_B que de acuerdo a lo anterior tendrá potencial

$$V(r_B)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_B}\right]$$

y la otra circunferencia de radio r_A, que tendrá potencial $V(r_A)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_A}\right]$

[illegible]

PROBLEMA 2

La separación más probable entre el electrón y el núcleo de H (un protón) es igual a r_o = $5.29{\cdot}10^{-11}$ m. Calcular el potencial eléctrico V creado por el núcleo, a una distancia r_o del mismo. Calcule la energía potencial eléctrica U del atomo.

DATOS

$r_o=5.29\cdot10^{11}m$ $\quad q_e=-1.6\cdot10^{-19}C$ $\quad q_p=1.6\cdot10^{-19}C$ $\quad \varepsilon_o=8.85\cdot10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2}$

El potencial creado por una carga eléctrica puntual es

$$V(r_o)=\frac{q_p}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_o}\right] \qquad V(r_o)=27.196\ V$$

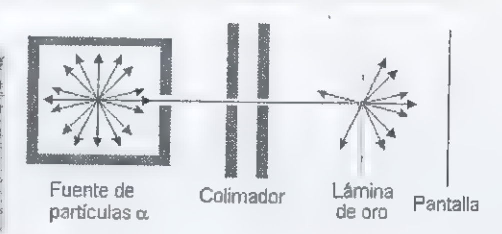
Considerando que la U = q (Vb - Va)

$$U=q_eV(ro)=\frac{q_e\,q_p}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_o}\right]=-43.514.10^{-19}\ J$$

[illegible]

PROBLEMA 3

En la experiencia de dispersión de Rutherford que analiza el modelo planetario del átomo, se disparan partículas alfa (carga +2e y masa 6.6×10^{27}kg) con velocidad media $2.0{\cdot}10^7$ m/s hacia una lámina de oro fijo (carga eléctrica del núcleo de oro +79e), como muestra la figura. Calcular a qué distancia del núcleo la partícula alfa invierte el sentido de su movimiento.



Cuando la partícula alfa se acerca al núcleo la única fuerza que actúa es la fuerza electrostática ejercida por el núcleo, que es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica del sistema (partícula alfa y núcleo) es constante, esto es

$$Ec_i+Ep_i=Ec_f+Ep_f$$

donde los subíndices indican dos estados mecánicos distintos. Se asume que el núcleo está en reposo y la energía de la partícula alfa está dada por $Ec_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$

Y la energía potencial entre las dos cargas está dada por $Ep = \frac{q_N q_\alpha}{4\pi\varepsilon_o r}$

Entonces la expresión de la ecuación de conservación de la energía se convierte en

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_i^2 + \frac{q_N q_\alpha}{4\pi\varepsilon_o r_i} = \frac{1}{2} m_\alpha v_f^2 + \frac{q_N q_\alpha}{4\pi\varepsilon_o r_f}$$

Inicialmente se puede suponer que la partícula alfa y el núcleo están muy separados de modo que r → ∞, lo que hace tender a cero la energía potencial del primer miembro de la ecuación.
Si se considera que el estado f corresponde al instante de retorno de la partícula alfa se cumple que $v_f = 0$ condición de punto de retorno. La ecuación se reduce a

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_i^2 = \frac{q_N q_\alpha}{4\pi\varepsilon_o r_f}$$

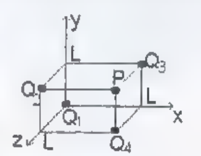
despejando la distancia r_f

$$r_f = \frac{2 q_N q_\alpha}{4\pi\varepsilon_o m_\alpha v_i^2} \qquad r_f = 2.755\times10^{-14}\, m$$

Si en vez de partículas alfa se usan protones como proyectil, ¿cuál sería la distancia?

PROBLEMA 4

Calcular el potencial eléctrico de la distribución de cargas puntuales mostradas en la figura, en el punto P. El valor de las cargas son $Q_1 = 10^{-6}$ C, $Q_2 = -2.10^{-6}$ C, $Q_3 = 3.10^{-6}$ C y $Q_4 = -2.10^{-6}$ C. La distancia L = 0.1m



El potencial eléctrico en un punto P debido a una distribución de N cargas puntuales está dado por

$$V_P = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \sum_{n=1}^{N} \frac{Q_n}{r_n}$$

donde Q_n es el valor de cada carga y r_n es la distancia entre cada carga y el punto P

Datos $\qquad \varepsilon_o = 8.85\cdot10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2} \qquad L = 0.1\,m$

$Q_1 = 10^{-6}C \qquad x_1 = 0m \qquad y_1 = 0m \qquad z_1 = 0m$

$Q_2 = -2\cdot10^{-6}C \qquad x_2 = 0m \qquad y_2 = L \qquad z_2 = L$

$Q_3 = 3\cdot10^{-6}C \qquad x_3 = L \qquad y_3 = L \qquad z_3 = 0m$

$Q_4 = -2\cdot10^{-6}C \qquad x_4 = L \qquad y_4 = 0m \qquad z_4 = L$

Coordenadas del punto P $\quad x_p = L \quad y_p = L \quad z_p = L$

Distancias entre las cargas y el punto P

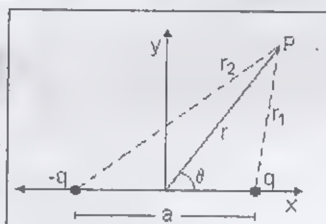
$$i = 1,...4 \qquad r_i = \sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2 + (z_p - z_i)^2}$$

Cálculo del potencial en el punto P $\quad V_p = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{4}\frac{Q_i}{r_i} = -3.8\cdot 10^4 V$

¿Cuál es la energía necesaria para posicionar una carga de 10[illegible] C en el punto P?

PROBLEMA 5

a) Calcule el potencial eléctrico producido por un dipolo en función r y θ, como indica la figura. b) Obtenga las expresiones de las líneas equipotenciales en el plano r y θ.



a) Empleando la fórmula de potencial eléctrico para distribuciones de cargas puntuales.

$$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r_2} \qquad (1)$$

es posible hacer las siguientes aproximaciones si se considera el punto P lo suficientemente alejado del dipolo a << r.

$$r_1 \approx r - \frac{a}{2}\cos(\theta) \qquad r_2 \approx r + \frac{a}{2}\cos(\theta)$$

donde r es la distancia del centro del dipolo al punto P. Reemplazando en (1) y operando resulta

$$V_p \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\left(r - \frac{a}{2}\cos(\theta)\right)} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\left(r + \frac{a}{2}\cos(\theta)\right)} = \frac{q\,a}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\cos(\theta)}{\left[r^2 - \frac{a^2}{4}\cos^2(\theta)\right]}$$

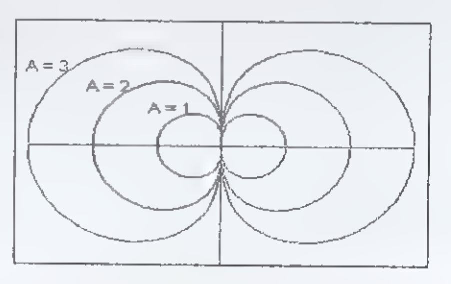
considerando que $r^2 >> \frac{a^2}{4}\cos^2(\theta)$

$$V_P(r,\theta) = \frac{q\,a}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\cos(\theta)}{r^2} \qquad (2)$$

La relación p = q a se llama **momento dipolar eléctrico.** A esta magnitud se le da naturaleza vectorial, estableciendo su vector asociado con dirección a lo largo de la recta que une las cargas, sentido desde la carga negativa a la positiva y su módulo está dado por la relación mencionada.

a) En el plano r, θ las equipotenciales deben cumplir

$$V_P(r,\theta) = \frac{q\,a}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\cos(\theta)}{r^2} = V_o$$



Líneas equipotenciales del dipolo en el plano

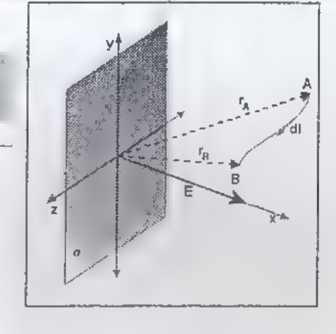
Entonces, la ecuación de la línea equipotencial será

$r(\theta) = A.\sqrt{\cos(\theta)}$ donde $A = \sqrt{\dfrac{q\,a}{4\pi\,\varepsilon_o V_o}}$

Grafique otra equipotencial para A = 4

PROBLEMA 6

Calcular la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos A y B ubicados en una región donde existe una placa plana infinitamente grande con densidad de carga σ.



La diferencia de potencial entre los puntos A y B viene dada por

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}(r).\vec{dl}$$

El campo existente en esa región es

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{i}$$

y la expresión del desplazamiento

$$\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

reemplazando en resulta

$$V_B - V_A = -\int_A^B \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{i}.\left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right) =$$

$$= -\int_{x_A}^{x_B} \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(x_A - x_B)$$

Entonces la diferencia de potencial depende de la distancia $x_A - x_B$, paralela a la dirección del campo, entre los dos puntos A y B y de la densidad superficial de carga σ.

Encuentre las superficies equipotenciales de esta distribución de carga

PROBLEMA 7

Cálculo del potencial eléctrico creado por un hilo recto cargado con densidad lineal λ, muy largo

El campo existente en esa región es

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o\,r}\vec{r_o}$$

y la expresión del desplazamiento

$$\vec{dl} = dr\,\vec{r_o} + r\,d\theta\,\vec{\theta_o} + dz\,\vec{k}$$

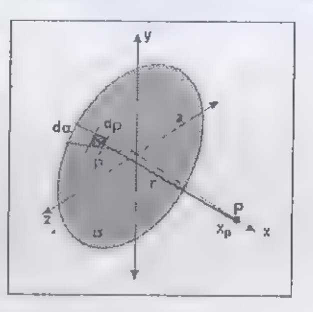
La diferencia de potencial resulta

$$V_B - V_A = -\int_A^B \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\vec{r}_o\left(dr\,\vec{r}_o + r\,d\theta\,\vec{\theta}_o + dz\,\vec{k}\right) = -\int_A^B \frac{\lambda\, dr}{2\pi\varepsilon_o r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{r_A}{r_B}\right)$$

El signo de la diferencia de potencial dependerá de la carga y de la relación entre r_A y r_B

PROBLEMA 8

Calcular el potencial eléctrico creado por un disco de radio a con densidad de carga uniforme σ en el eje, a una distancia x_P del centro del disco, ver la figura.



El potencial eléctrico para una distribución continua de cargas está dado por

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_R \frac{dq}{r}$$

donde R representa la región donde está distribuida la carga, dq es la carga elemental y r es la distancia entre esta carga y el punto P.

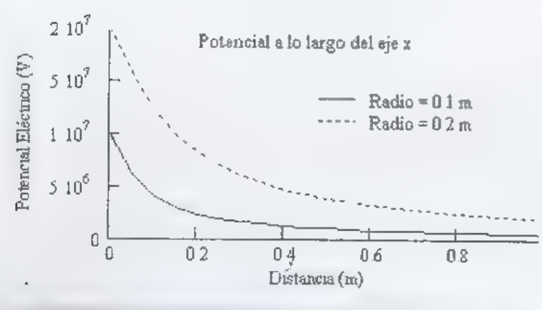
Para este caso donde el disco tiene una distribución superficial uniforme de carga el dq se puede expresar a partir de una densidad superficial de carga σ como dq = σ ds

$$dV_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma\, ds}{r}$$

de la figura surge que $ds = \rho\, d\rho\, d\alpha$ y $r = \sqrt{\rho^2 + x_P^2}$

reemplazando e integrando sobre todo el disco

$$V_P = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{\rho^2 + x_P^2}} = \frac{\sigma\, 2\pi}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^a \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + x_P^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\sqrt{a^2 + x_P^2} - x_P\right)$$

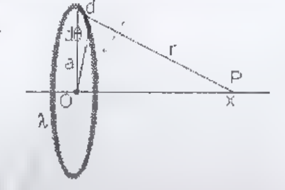


:Representación gráfica del potencial eléctrico a lo largo del eje. σ = 1.77 10^{-11} C/m^2

¿Para qué valor de radio del disco el potencial se duplica?

PROBLEMA 9

Considere un anillo de radio a que posee una carga Q distribuida uniformemente. Ver figura. Determine el potencial eléctrico en un punto P sobre el eje del anillo, a una distancia x de su centro. Analice los casos x >> a y x = 0



El potencial eléctrico para una distribución continua de cargas está dado por

$$V_P = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\int_R \frac{dq}{r} \qquad (1)$$

donde R representa la región donde está distribuida la carga, dq es la carga elemental y r es la distancia entre esta carga y el punto P.

La carga Q está distribuida a lo largo del anillo de radio a, por lo tanto, es posible definir una densidad lineal de carga como

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi\,a}$$

de donde surge que $dq = \lambda\,dl$ con $dl = a\,d\theta$ reemplazando $dq = \lambda\,a\,d\theta$

la distancia del elemento de carga al punto P es $r = \sqrt{x^2 + a^2}$
reemplazando en (1)

$$V_P(x) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda\,a\,d\theta}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{\lambda\,a}{\sqrt{x^2+a^2}}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{1}{2\,\varepsilon_o}\frac{\lambda\,a}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Reemplazando λ resulta

$$V_P(x) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad (2)$$

Analicemos el comportamiento de $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\left(a/x\right)^2}}$

Si x>>a entonces (a/x) → 0 y puede se desarrollar en serie, solo hasta el tercer término

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(a/x\right)^2}} \cong 1 - \frac{1}{2}\left(a/x\right)^2 + \frac{3}{8}\left(a/x\right)^4$$

de lo anterior surge que $\dfrac{1}{x\sqrt{1+\left(a/x\right)^2}} \simeq \dfrac{1}{x}$

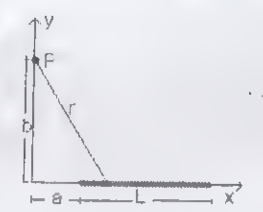
para x > > a $\qquad V_P(x) = \dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\dfrac{1}{x}$

Para el caso x = 0 se puede tener el resultado de (2).

$$V_p(x) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_o}\frac{1}{a}$$

PROBLEMA 10

Considere una barra delgada de longitud L que posee una carga Q distribuida uniformemente. Determine el potencial eléctrico en un punto P a una distancia b a lo largo del eje y positivo, como muestra la figura.



El diferencial potencial eléctrico para una distribución continua de cargas está dado por

$$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_R \frac{dq}{r} \quad (1)$$

donde R representa la región donde está distribuida la carga, dq es la carga elemental y r es la distancia entre esta carga y el punto P.

La carga Q está distribuida a lo largo de la barra de longitud L, por lo tanto, es posible definir una densidad lineal de carga como

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

de donde surge que $dq = \lambda\, dl$ con $dl = dx$ reemplazando $dq = \lambda\, dx$

la distancia del elemento de carga al punto P es $r = \sqrt{x^2 + b^2}$

entonces (1) se puede expresar

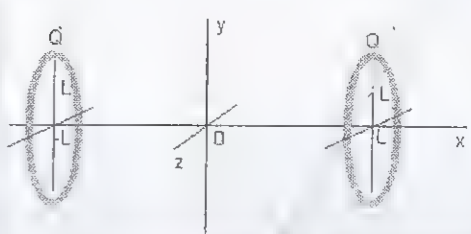
$$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_a^{a+L}\frac{\lambda\, dx}{\sqrt{x^2+b^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_a^{a+L}\frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left|\ln\left[x+\sqrt{x^2+b^2}\right]\right|_a^{a+L}$$

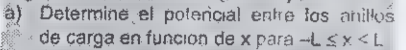
$$V_p = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\ln\left[\frac{\left[(a+L)+\sqrt{(a+L)^2+b^2}\right]}{\left[a+\sqrt{a^2+b^2}\right]}\right]$$

Caso: a igual a cero $V_p = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\ln\left[\frac{\left[L+\sqrt{L^2+b^2}\right]}{b}\right]$

PROBLEMA 11

Dos cargas en forma de anillo de radio L y carga +Q están centradas sobre el eje x y localizadas en sendos planos perpendiculares al mismo en los puntos x = - L y en x = L. Considere una carga puntual de masa m y carga q que está restringida a moverse a lo largo del eje x





a) Determine el potencial entre los anillos de carga en funcion de x para $-L \le x < L$

b) Demostrar que el potencial pasa por un mínimo en x = 0.

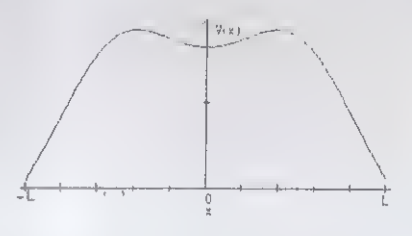
c) Demostrar que el potencial para x<<L toma la forma $V(0)+kx^2$

d) Deducir la frecuencia de oscilación de la masa m si se desplaza ligeramente de origen y se deja libre.

---

a) Usando el resultado del problema 9 se puede escribir

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{Q}{\sqrt{(x-L)^2+L^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(x+L)^2+L^2}}\right]$$



b) Una manera sencilla de encontrar el mínimo es haciendo una representación gráfica de V(x)
En la gráfica se observa un mínimo relativo en x = 0
Otra forma de obtener este resultado es usar el método de la derivada

$\dfrac{dV(x)}{dx} = 0$ se despeja el valor de x que cumple esta condición y si al reemplazar en la segunda derivada el valor es mayor que cero se tiene un mínimo.

b) Rescribiendo

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o L}\left[\frac{1}{\sqrt{(x/L-1)^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{(x/L+1)^2+1}}\right]$$

Haciendo el desarrollo en serie para x<< L resulta

$$V(x) = \frac{Q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_o L}\left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

d) La fuerza sobre la carga q viene dada por $\vec{F} = q\vec{E} = -q\nabla V(x) = -\dfrac{qQ\sqrt{2}}{16\pi\varepsilon_o L^3}x\,\vec{i}$

Recordando la fuerza de restitución en el resorte $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Se tiene que $k = \dfrac{qQ\sqrt{2}}{16\pi\varepsilon_o L^3}$ y $\omega = \sqrt{\dfrac{qQ\sqrt{2}}{16\pi\varepsilon_o mL^3}}$

Se analizó en el punto donde el potencial presentaba un mínimo, ¿dónde se hallan los máximos?

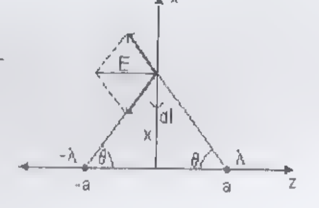
PROBLEMA 12

Dos hilos muy largos con densidades de cargas λ y -λ son paralelos al eje y, están localizados en z = -a y z = a. Calcule la diferencia de potencial V_{AB} entre los puntos A y B indicados en la figura.

El módulo del campo creado por el hilo cargado es

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r}$$

y tiene dirección radial respecto del eje del hilo.



$$\vec{E}_{\lambda} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{\sqrt{a^2+y^2}}\left[sen(\theta)\vec{i} - \cos(\theta)\vec{k}\right]$$

$$\vec{E}_{-\lambda} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{\sqrt{a^2+y^2}}\left[-sen(\theta)\vec{i} - \cos(\theta)\vec{k}\right]$$

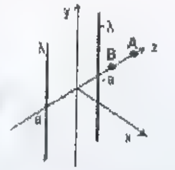
El campo total sobre el eje x es

$$\vec{E} = \vec{E}_{\lambda} + \vec{E}_{-\lambda} = -\frac{2}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{\sqrt{a^2+y^2}}\cos(\theta)\vec{k}$$

Para calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B se emplea $\vec{dl} = -dx\,\vec{i}$

$$V(r_B) - V(r_A) = -\int_{r_A}^{r_B}\vec{E}\;\vec{dl} = -\int_{x_A}^{x_B}\left[-\frac{2}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{\sqrt{a^2+y^2}}\cos(\theta)\vec{k}\right]\left[-dx\,\vec{i}\right] = 0$$

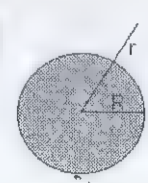
La trayectoria desde el punto A hasta el B a lo largo del eje x coincide con una superficie equipotencial.



Para el dibujo de la figura calcule la diferencia de potencial V_{AB}.

PROBLEMA 13

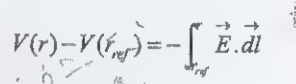
Dada una esfera conductora de radio R con carga Q aislada. Calcular V(r) para r ≥R y r ≤ R.



Cálculo de V(r) para r>R

Para calcular el potencial eléctrico para r > R debemos emplear la expresión

$$V(r) - V(r_{ref}) = -\int_{r_{ref}}^{r}\vec{E}.\vec{dl}$$



donde r_{ref} representa una posición en el espacio donde el potencial eléctrico es conocido o se le asigna en forma arbitraria un valor.

En nuestro caso, la palabra "aislada" debe asociarse a la referencia $r_{ref} \to \infty$ y $V(r_{ref}) = 0$

Entonces

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.\vec{dl}$$

El campo eléctrico creado por una carga es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}\vec{r_o} \quad \text{para } r > R$$

Reemplazando se tiene

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}\vec{r_o}.\vec{dl} \quad \text{recordando que} \quad \vec{r_o}.\vec{dl} = \cos(\theta)dl = dr$$

$$V(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r} \quad \text{para } r > R$$

Cálculo de V(r) para r < R
El campo eléctrico en esta región es

$$\vec{E}_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}\vec{r_o} \quad \text{para } r \geq R$$

$$\vec{E}_2(r) = 0 \quad \text{para } r < R$$

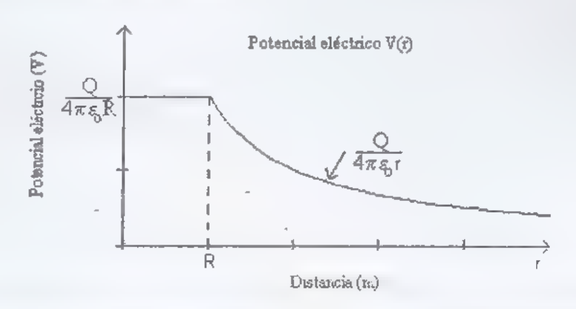
$$V(r) = -\int_{\infty}^{r}\vec{E}.\vec{dl} = -\int_{\infty}^{R}\vec{E_1}(r).\vec{dl} - \underbrace{\int_{R}^{r}\vec{E_2}(r).\vec{dl}}_{\text{0 por ser conductor}} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\infty}^{R}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R} \quad \text{para } r \leq R$$

El valor del potencial para todos los puntos pertenecientes a la esfera conductora cargada es constante
Entonces el potencial eléctrico creado por una esfera conductora

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{1}{R} & para\ r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{1}{r} & para\ r \geq R \end{cases}$$

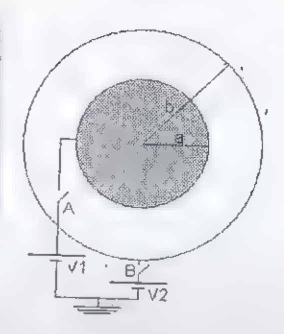
La representación gráfica de la variación del potencial eléctrico en función de r



¿De la gráfica se puede decir que la función potencial es continua?, ¿por qué?

PROBLEMA 14

Una esfera conductora de radio a está conectada a una batería de potencial eléctrico V_1, rodeando a ésta se encuentra otra esfera conductora de radio b que puede o no estar conectada a la batería V_2. a) Si el interruptor A está cerrado y el B abierto, calcular E(r) para r < a, a < r < b; r > b. b) si el interruptor A está abierto y el B cerrado calcular E(r) para los mismos puntos que en el caso anterior. c) Suponga que $V_2 = 0$, repita el cálculo del item b, si el interruptor A está cerrado. d) Suponga que los dos interruptores están cerrados, repita el calculo.



a) Si el interruptor A está cerrado, (con b abierto) calcular E(r) para r < a; a < r < b; r > b.

Si el interruptor A está cerrado y el interruptor b abierto, la esfera de radio a está a potencial V1, esto significa que está cargada y el valor de la carga vendrá dado por

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o a} \qquad \Rightarrow \qquad Q_1 = 4\pi\varepsilon_o V_1 a$$

Esta carga se induce en la esfera conductora de radio b, en la cubierta interna $-Q_1$ y en la externa $+Q_1$
Como la esfera de radio a es un conductor, la Q1 estará en la superficie, en su interior el campo eléctrico es nulo

Entonces para r < a $\qquad E_1(r) = 0$

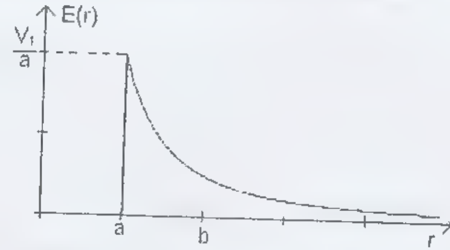
Para a < r < b, se puede determinar el campo usando la ley de Gauss. Para una esfera de radio r tal que cumpla la condición a < r < b y respete la simetría, es decir sea concéntrica a la esfera de radio a, resulta

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_o}$$

Reemplazando Q_1 y haciendo pasaje de términos se tiene

$$E_2(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{V_1 a}{r^2} \qquad \text{para } a < r < b$$

Si despreciamos el cascarón conductor de radio b, entonces el campo para r > b es el mismo
La representación gráfica del campo en función de la distancia resulta



b) Si el interruptor A está abierto, mientras que el B está cerrado, calcular E(r) para los mismos puntos que en el caso anterior.

Si el interruptor está abierto, la esfera de radio a está descargada.
La esfera de radio b está a potencial V_2 y por lo tanto está cargada y el valor de la carga es

$$V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o b} \qquad \Rightarrow Q_2 = 4\pi\varepsilon_o V_2 b$$

Como la carga está en la superficie externa de la esfera de radio b, todo el interior del sistema no tiene carga y por lo tanto, el campo es cero

$E_1(r) = 0$ para $r < b$

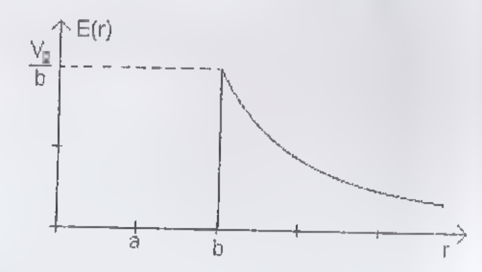
Mientras que para $r > b$ el campo se determina, usando de nuevo la ley de Gauss

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_2}{\varepsilon_o}$$

Reemplazando y haciendo pasaje de términos se tiene

$$E_2(r) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{V_2 b}{r^2} \quad \text{para } r > b$$

La representación gráfica será



c) Suponga que $V_2 = 0$, repita el cálculo si el interruptor A está cerrado.

Esto significa que la esfera de radio b está a potencial cero **necesariamente**, de modo que la carga inducida por la esfera cargada de radio a, solo está en la cubierta interna de la esfera de radio b con signo negativo, $-Q_1$, mientras que en la cubierta externa la carga inducida, Q_1, través de la batería V_2 va a tierra, manteniéndose con carga cero.

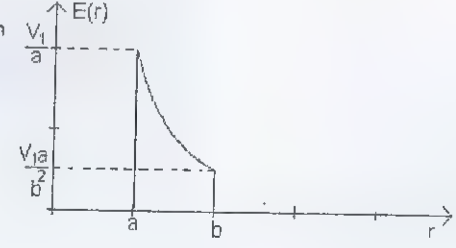
Entonces los campos son

$E_1(r) = 0$ para $r < a$

$$E_2(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{V_1 a}{r^2} \quad \text{para } a \le r \le b$$

$E_3(r) = 0$ para $r > b$

La representación gráfica del campo en función de la distancia



d) Suponga que los dos interruptores están cerrados, repita el cálculo

La esfera de radio a está al potencial V_1 y la esfera hueca de radio b a potencial V_2

Para $r < a$ el campo es nulo entonces $E(r) = 0$

Para $a \leq r \leq b$ se propone como potencial $V(r) = \frac{A}{r} + B$

Las constantes A y B se determinan a partir de los valores de potencial en $r = a$ y en $r = b$, esto es

$$V(a) = \frac{A}{a} + B = V_1 \qquad V(b) = \frac{A}{b} + B = V_2$$

Entonces

$$A = -\frac{V_1 - V_2}{a-b} \cdot a \cdot b, \qquad B = V_1 + \frac{V_1 - V_2}{a-b} \cdot b$$

$$V(r) = -\frac{V_1 - V_2}{a-b} \cdot \frac{a \cdot b}{r} + V_1 + \frac{V_1 - V_2}{a-b} \cdot b$$

El campo eléctrico se obtiene usando la expresión

$$\overline{E} = -\nabla \cdot V(r)$$

Teniendo en cuenta la simetría la expresión anterior se reduce a

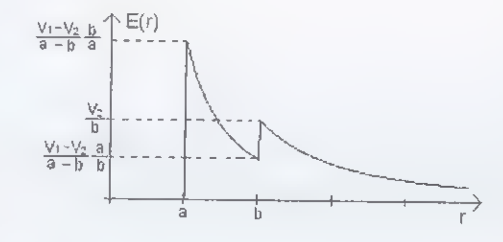
$$E(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = \frac{V_1 - V_2}{a-b} \cdot \frac{a \cdot b}{r^2} \qquad para \qquad a \leq r \leq b$$

Mientras que para $r \geq b$ el campo se determina, usando de nuevo la ley de Gauss

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q_2}{\varepsilon_o}$$

La esfera de radio b está a potencial V_2 y por lo tanto está cargada y el valor de la carga es

$$V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o b} \qquad \Rightarrow Q_2 = 4\pi\varepsilon_o V_2 b$$



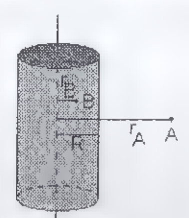
Reemplazando y haciendo pasaje de términos se tiene

$$E_2(r) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{V_2 b}{r^2} \qquad \text{para } r \geq b$$

La representación gráfica del campo en función de la distancia, observe la discontinuidad del campo en r = b.

PROBLEMA 15

Calcular la diferencia de potencial V_{AB} debido a una distribución cilíndrica de carga de radio R y densidad de carga ρ. Los puntos A y B está indicados en la figura



En el capítulo 3 problema 9, se obtuvo los campos eléctricos para la misma distribución de carga

$$E_1(r_1) = \frac{\rho r_1}{2\varepsilon_o} \qquad \text{para } r_1 \leq R$$

$$E_2(r_1) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o\, r_1} \qquad \text{para } r_1 \geq R$$

Cálculo del potencial para $V(r_B)$ -$V(r_A)$

$$V(r_B) - V(r_A) = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}.\vec{dl} = -\int_{r_A}^{R} \vec{E}_1(r).\vec{dl} - \int_{R}^{r_B} \vec{E}_2(r).\vec{dl}$$

Cálculo de las integrales por separado

$$-\int_{r_A}^{R} \vec{E}_1(r).\vec{dl} = -\int_{r_A}^{R} \frac{\rho r}{2\varepsilon_o} dr = \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\left(r_A^2 - R^2\right)$$

$$-\int_{R}^{r_B} \vec{E}_2(r).\vec{dl} = -\int_{R}^{r_B} \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \frac{dr}{r} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln\left(\frac{R}{r_B}\right)$$

Sumando el resultado de ambas integrales con su signo resulta

$$V(r_B) - V(r_A) = \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\left(r_A^2 - R^2\right) + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln\left(\frac{R}{r_B}\right)$$

[redacted]

PROBLEMA 16

¿Cuántos electrones se deben quitar a un conductor esférico inicialmente descargado de radio 0.3 m para producir un potencial de 10KV en la superficie?

El potencial creado por una esfera conductora de radio R cargada es

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r} \qquad para\ r \geq R \quad \Rightarrow \quad V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{R} = Vo$$

La carga queda expresada como $Q = 4\pi\ \varepsilon_o\ R\ Vo$

Si Vo = 10 KV R = 0.3 m $\varepsilon_o := 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{coul^2}{newton\ m^2}$

Entonces $Q = 3.336 \times 10^{-7}$ C

El número de electrones vendrá dado por $n = \frac{Q}{e} = \frac{3.336 \times 10^{-7} C}{1.6 \times 10^{-19} C} = 2.085 \times 10^{12}\, electrones$

¿Con qué signo queda cargado el conductor?

PROBLEMA 17

Dos esferas conductoras de radio 0.1m y 0.4 m respectivamente, están muy separadas pero conectadas con un hilo conductor. Se deposita una carga total de $20\ 10^{-6}$ C en esta combinación de esferas. a) ¿Cómo se distribuye la carga?. b) ¿cuál es el potencial eléctrico de cada esfera?. c) ¿cual es el campo eléctrico de cada esfera?



Las condiciones que se cumplen son:

1 .- La carga total se conserva de modo que

$Q_T = Q_1 + Q_2$ (1)

Siendo Q_1 y Q_2 las cargas en cada esfera conductora, no se tiene en cuenta al hilo

2 .- La combinación de las dos esfera se comporta como un único conductor, de modo, que las esferas deben estar a igual potencial

Considerando que son esferas, los potencial en sus superficies deben ser

Para la esfera de radio R_1

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R_1} \quad (2)$$

Para la esfera de radio R_2

$$V = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R_2} \quad (3)$$

Igualando las (2) y (3) $V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R_2}$

Resulta

$$\frac{Q_1}{R_1} - \frac{Q_2}{R_2} = 0 \quad (4)$$

Las (1) y (4) constituyen un sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q_T \\ \frac{Q_1}{R_1} - \frac{Q_2}{R_2} = 0 \end{cases}$$

Donde $R_1 = 0.1$ m $R_2 = 0.4$ m $Q_T = 20\times10^{-6}$ C

La solución del sistema es

$Q_1 = 4\times10^{-6}$ C $Q_2 = 1.6\times10^{-5}$ C

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R_1} = 3.60\times10^5\,V \qquad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R_2} = 3.60\times10^5\,V$$

Los valores de los campos son

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R_1^2} = 3.60\times10^6\,V/m \qquad E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R_2^2} = 9.0\times10^5\,V/m$$

[illegible]

PROBLEMA 18

El potencial eléctrico de un dipolo como momento dipolar eléctrico p = qa está dado por

$$V_p(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\cos(\theta)}{r^2}$$

Determine las componentes del campo eléctrico.

El campo eléctrico se puede calcular a partir del potencial eléctrico haciendo

$$\vec{E}(r,\theta) = -\nabla V(r,\theta)$$

desarrollando el operador de Nabla en coordenadas polares

$$\vec{E}(r,\theta) = -\left[\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial r}\vec{r}_o + \frac{\partial V(r,\theta)}{r\partial\theta}\vec{\theta}_o\right]$$

$$E_r(r,\theta) = -\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial r} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\cos(\theta)}{r^3}$$

$$E_\theta(r,\theta) = -\frac{\partial V(r,\theta)}{r\partial\theta} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o}\frac{sen(\theta)}{r^3}$$

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r^3}\left[2\cos(\theta)\vec{r}_o + sen(\theta)\vec{\theta}_o\right]$$

¿Para qué ángulo θ el campo tiene componente radial?

PROBLEMA 19

A partir de una línea equipotencial V(x, y) = Cte. construya una línea de fuerza del campo eléctrico.

Si se calcula el diferencial de V(x, y) = Cte. resulta

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = 0$$

y considerando la relación con las componentes del campo

$$dV = -E_x\, dx - E_y\, dy = 0$$

entonces, es posible encontrar la expresión de la familia de líneas equipotenciales a partir de las componentes del campo eléctrico haciendo

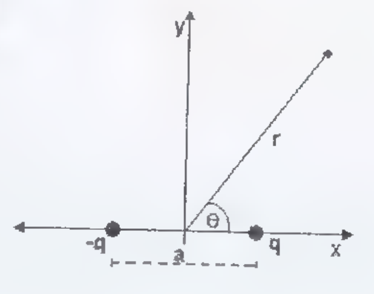
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{E_x}{E_y}$$

Como las líneas de fuerzas del campo eléctrico son tangentes a este, entonces siempre atraviesan las superficies equipotenciales en forma perpendicular y corren en la dirección en la cual el potencial decrece más rápidamente. Las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales son **familias ortogonales**, es decir, en un punto de intersección sus tangentes son perpendiculares[1]. Entonces a partir de esta condición es posible obtener la familia de líneas de fuerzas del campo eléctrico. Haciendo

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{E_x}{E_y}$$

PROBLEMA 20

Encuentre las líneas de fuerzas del campo eléctrico en el plano x y de la figura, donde se halla un dipolo eléctrico.



El potencial de un dipolo en el punto P viene dado por

$$V_P(r,\theta) = \frac{q\,a}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\cos(\theta)}{r^2}$$

donde r y θ son las coordenadas polares del punto P.

El campo eléctrico se puede expresar como

$$\vec{E} = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{r}_o - \frac{\partial V}{r\partial\theta}\vec{\theta}_o = \frac{2q\,a\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_o r^3}\vec{r}_o + \frac{q\,a\,sen(\theta)}{4\pi\varepsilon_o r^3}\vec{\theta}_o$$

---

[1] Dos rectas perpendiculares entre sí sus pendientes están relacionadas por $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ donde m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas

Teniendo en cuenta el resultado del problema 19

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{r\partial \theta}dr = 0 \Rightarrow \frac{\frac{\partial V}{\partial r}}{\frac{\partial V}{r\partial\theta}} = -\frac{E_r}{E_\theta}$$

$$\frac{r\,d\theta}{d\,r} = -\frac{E_r}{E_\theta}$$

condición para ser líneas de fuerza

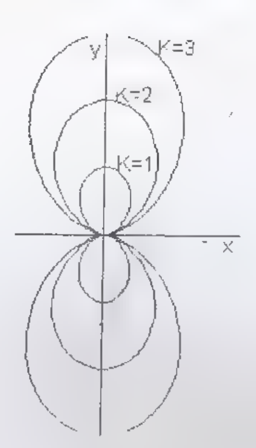
$$\frac{dr}{r\cdot d\theta} = \frac{E_r}{E_\theta} = 2\cdot\frac{\cos(\theta)}{sen(\theta)} \quad \text{entonces}$$

$$\frac{dr}{r} = 2\cdot\frac{\cos(\theta)}{sen(\theta)}\cdot d\theta \quad \text{integrando resulta}$$

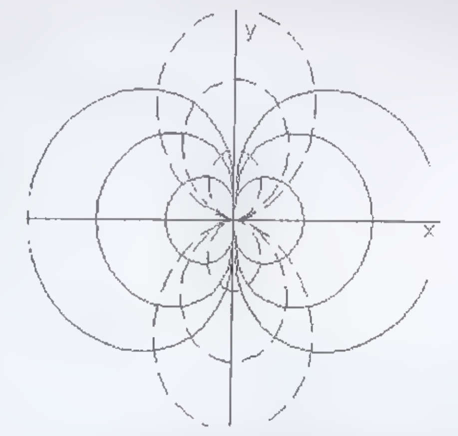
$$\ln(r) = 2\cdot\ln(sen(\theta) + \ln(K) = \ln(K\cdot sen^2(\theta))$$

donde K es una constante de integración, finalmente se puede escribir

$$r(\theta) = K\cdot sen^2(\theta)$$



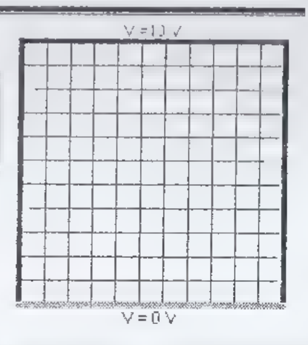
Líneas de fuerza del campo eléctrico



Líneas de fuerza punteadas y líneas equipotenciales llenas. En la intersección sus tangentes son normales

PROBLEMA 21

En la figura se muestra dos electrodos uno a potencial eléctrico igual 10 V y el otro a 0 V Calcular del potencial eléctrico en todos los puntos de intersección del retículo contenido por la región limitada por los electrodos.



La función potencial eléctrico V(x,y) de la región limitada por los electrodos que corresponden a contorno equipotenciales satisfacen la ecuación de Laplace, esto es

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}=0$$

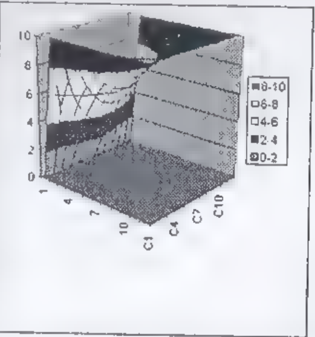
Para una región donde se conoce el valor del contorno, admite una solución de tipo Numérica dada por

$$V(x,y)=\frac{V(x+h,y)+V(x-h,y)+V(x,y+h)+V(x,y-h)}{4} \qquad (1)$$

donde (x, y) son las coordenadas de los puntos de intersección del retículo y h es el paso del mismo.

Se puede emplear una planilla de cálculo (por ejemplo, EXCEL), donde cada celda representa un punto de intersección del reticulado Se define la región y a las celdas pertenecientes al borde se le asignan los valores de contorno (valores de los electrodos) y en cada celda interior se escribe la fórmula (20.1). Teniendo en cuenta los valores referenciados a los vecinos de esa celda, adaptando la planilla a un cálculo iterativo (en este caso fueron 100 iteraciones con un cambio máximo de 0 001), el utilitario recalcula en forma automática toda la región. Los valores resultantes pueden ser visualizados mediante una gráfica del tipo V(x, y) como muestra la figura

0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
0	5,09	7,15	8,16	8,73	9,1	9,36	9,55	9,69	9,81	9,91	10
0	3,21	5,36	6,75	7,68	8,32	8,79	9,14	9,41	9,63	9,82	10
0	2,39	4,33	5,8	6,9	7,72	8,33	8,81	9,18	9,49	9,75	10
0	2	3,78	5,24	6,4	7,31	8,02	8,58	9,02	9,39	9,71	10
0	1,84	3,53	4,98	6,17	7,11	7,86	8,46	8,94	9,33	9,68	10
0	1,84	3,53	4,98	6,17	7,11	7,86	8,46	8,94	9,33	9,68	10
0	2	3,78	5,24	6,41	7,31	8,02	8,58	9,02	9,39	9,71	10
0	2,39	4,33	5,81	6,9	7,72	8,33	8,81	9,18	9,49	9,75	10
0	3,21	5,36	6,75	7,68	8,32	8,79	9,14	9,41	9,63	9,82	10
0	5,09	7,15	8,16	8,74	9,1	9,36	9,55	9,69	9,81	9,91	10
	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10



Modifique las condiciones de contorno, suponga que V(0,y) = V(x,0) = 0 y los otros lados el potencial es 10V

CAPÍTULO VII: CAPACIDAD

PROBLEMA 1

Calcular la capacidad de una esfera metálica cargada de radio R, que se encuentra aislada. Analice el resultado. Determine la capacidad eléctrica de la Tierra (R = 5400 km).

El potencial eléctrico creado por una esfera cargada es

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}$$

La capacidad está dada por $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_o R$

La capacidad depende de la geometría, en este caso del radio.

La capacidad terrestre

$$C = 4\pi\varepsilon_o R_T = \ 600\,\mu F$$

¿De qué depende la capacidad de un cuerpo esférico?

PROBLEMA 2

Calcular la capacidad de:

a) un condensador plano.
b) un condensador esférico.
c) un condensador cilíndrico.

Condensador plano

Separación entre las placas: d   Área de las placas: A
El campo eléctrico entre las placas de un condensador plano, si la carga entre las placa es Q

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_o A}$$

La diferencia de potencial entre las placas es $V = E\,d = \frac{Q\,d}{\varepsilon_o A}$

Entonces la capacidad es $C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_o A}{d}$

La capacidad de un condensador de placas paralelas depende del área de las placas y de la separación entre las mismas.

Condensador esférico

Radio interior: R1   Radio exterior: R2

El campo eléctrico entre las placas de un condensador esférico, si la carga entre las placas es Q

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{r}_o$$

La diferencia de potencial entre las placas es

$$V(R_2)-V(R_1) = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o\, r^2}\vec{r_o}\cdot\vec{dl} = -\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$V(R_2)-V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\left[\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right]$$

ordenando resulta

$$V(R_2)-V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\left[\frac{R_1-R_2}{R_1\,R_2}\right]$$

Entonces la capacidad es $C = \dfrac{Q}{V(R_2)-V(R_1)} = \dfrac{4\pi\,\varepsilon_o\;R_1\,R_2}{R_1-R_2}$

La capacidad del condensador esférico depende de los radios de los electrodos esféricos

Condensador cilíndrico

Radio interior: R1 Radio exterior: R2

El campo eléctrico entre las placas de un condensador cilíndrico, si la densidad lineal carga entre las placas es λ

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o\, r}\vec{r_o}$$

La diferencia de potencial entre las placas es

$$V(R_1)-V(R_2) = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o\, r}\vec{r_o}\cdot\vec{dl} = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$

$$V(R_1)-V(R_2) = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Entonces la capacidad es $C = \dfrac{Q}{V(R_1)-V(R_2)} = \dfrac{2\pi\,\varepsilon_o\,L}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}$

La capacidad del condensador cilíndrico depende de los radios de los electrodos, se debe tenerse presente que la capacidad puede ser definida por unidad de longitud

$$c = \frac{C}{L} = \frac{2\pi\,\varepsilon_o}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}$$

PROBLEMA 3

Un condensador de placas paralelas tiene un área de placa de 100 cm^2 y una capacidad de 7pF. ¿Cuál es la separación entre las placas?

$$C = \frac{\varepsilon_o A}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\varepsilon_o A}{C} = 0.013\,m$$

¿Si se duplica la distancia entre las placas cuál es el valor de la nueva capacidad?

PROBLEMA 4

Cuando se aplica una diferencia de potencial de 500V entre las placas de un condensador de placas paralelas, estas tiene una densidad de carga de 400 nC/m^2 ¿Cuál es el espacio entre ellas?

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{V} = \frac{\varepsilon_o A}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\varepsilon_o V}{\sigma} = 0.011\,m$$

Si el área fuera 0.001m ¿cuál es el valor de la capacidad?

PROBLEMA 5

a) Calcule la capacidad de un condensador plano de superficie cuadrada, si la longitud del lado es 1 cm y la separación entre las placas 1mm. Calcule de nuevo la capacidad si b) cambia al doble el lado y se deja fija la separación. c) Cambia al doble la separación y se deja fijo el lado. Haga un análisis de los resultados.

Según los resultados del problema 2 la capacidad de un condensador plano es

$$C = \frac{\varepsilon_o A}{d} \quad . \quad \varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

a) Si el lado = 1 cm $\quad A = 0.01^2\, m^2 \quad d = 0.001\,m$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_o A}{d} = 8.85 \cdot 10^{-4}\, nF$$

b) Si el lado = 2 cm $\quad A = 0.02^2\, m^2 \quad d = 0.001\,m$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_o A}{d} = 3.54 \cdot 10^{-3}\, nF$$

b) Si el lado = 1 cm $\quad A := 0.01^2 \cdot m^2 \quad d := 0.002 \cdot m$

$$C_3 = \frac{\varepsilon_o A}{d} = 4.425 \cdot 10^{-4}\, nF$$

Notar que es mayor el incremento de la capacidad al aumentar el lado de las superficies de las placas.

Justifique el comentario anterior.

PROBLEMA 6

Un condensador esférico tiene radio interno R_1 = 1 cm y radio externo R_2 = 2 cm. Calcular la capacidad. Repita el cálculo si el radio externo es R_2 = 1.1 cm, y analice el resultado comparándolo con la capacidad de un condensador plano.

Según los resultados del problema 2 la capacidad de un condensador esférico es

R1 = 0.01 m R2 = 0.02 m $\varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}$

$$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_o\, R_1 R_2}{R_2 - R_2} = 2.224\,pF$$

Para el caso del radio externo R2 = 0.011 m

$$C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_o\, R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 12.23\,pF$$

Si usamos la aproximación a un condensador plano de modo que

$4 \cdot \pi \cdot R1 \cdot R2 = 4 \cdot \pi \cdot R1^2$ $\qquad d = R2 - R1$

Entonces $C_3 = \dfrac{\varepsilon_o A}{d} = 11.12\,pF$

El error porcentual cometido con este cálculo es $E\% = \dfrac{C_2 - C_3}{C_2} 100 = 9.09\%$

¿Cuál debería ser la diferencia entre los radios para que el error sea del 2%?

PROBLEMA 7

Considere un condensador plano con una de sus placas móviles, inicialmente se encuentra cargado y aislado. Si se separan las placas al doble de la distancia original, ¿cuál es el nuevo valor del potencial y del campo? Haga el balance energético entre los dos estados.

La capacidad inicial es $C_1 = \dfrac{\varepsilon_o A}{d}$

Si el condensador se encontraba cargado, supongamos con una carga Q entonces se hallaba al potencial V_1 donde

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{Q d}{\varepsilon_o A}$$

Al separarse las placas del condensador AISLADO se modifica su potencial pero no la carga, el nuevo potencial está dado por

$V_2 = \dfrac{Q 2 d}{\varepsilon_o A}$ que corresponde a $V_2 = 2V_1$

Y la nueva capacidad $C_2 = \dfrac{Q}{V_2} = \dfrac{\varepsilon_o A}{2d} = \dfrac{C_1}{2}$

es decir, la mitad de C_1 En cuanto al campo eléctrico no cambio, porque depende solo de la carga y la superficie de las placas.

Cálculo de la energía

Antes de separar

$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 \qquad\qquad U_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2$$

después de separar, reemplazamos en términos de los datos iniciales.

$$U_2 = \frac{1}{2}\frac{C_1}{2} 4V_1^2 = 2U_1 \qquad\qquad \Delta U = U_2 - U_1 = U_1$$

Este aumento de energía es el trabajo realizado para separar las placas que se almacenó en el condensador.

¿Qué cambio ocurre con la energía si se mantiene constante la diferencia de potencial y la distancia entre las placas y se duplica el área original?

PROBLEMA 8

Considere un condensador plano con una de sus placas móviles que se encuentra conectado a una fuente de diferencia de potencial constante, si se acercan las placas a la mitad de la distancia original. Encuentre la expresión de la carga y del campo en la nueva configuración. Haga el balance energético entre los dos estados.

La capacidad inicial es

$$C_1 = \frac{\varepsilon_o A}{d}$$

Si el condensador se encontraba conectado a una fuente de diferencia de potencial constante V_1, entonces la carga está dada por

$$Q_1 = C_1 V_1 = \frac{\varepsilon_o A}{d} V_1$$

Al separarse las placas del condensador, se mantiene constante el potencial y entonces debe cambiar la carga, la nueva carga está dada por

$$Q_2 = \frac{\varepsilon_o A}{d/2} V_1$$

La capacidad es

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_1} = \frac{2\varepsilon_o A}{d} \quad \text{entonces} \quad C_2 = 2C_1 \quad \text{es decir, es el doble de } C_1$$

El campo eléctrico cambió, porque depende de la carga y la superficie de las placas, por los datos anteriores se duplicó.

Cálculo de la energía

Antes de separar

$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 \qquad U_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2$$

después de separar, reemplazamos en términos de los datos iniciales

$$U_2 = \frac{1}{2} 2 C_1 V_1^2 = 2U_1$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = U_1$$

Este aumento de energía es el trabajo realizado para separar las placas que se almacenó en el condensador.

[illegible] Se mantiene constante la diferencia de potencial y la distancia entre [illegible]

PROBLEMA 9

Un cable coaxial de 100 m de longitud que tiene un conductor interno de radio 1.25 mm con una carga de 8 µC, está rodeado por otro conductor de radio interior 3.6 mm y una carga de -8 µC. a) ¿ Cuál es la capacidad del cable? b) ¿Cuáles la diferencia de potencial entre los dos conductores?

DATOS

$R_1 = 1.25mm \qquad R_2 = 3.6\,mm \qquad Q = 8 \cdot 10^{-6} C \qquad L = 100\,m \qquad \varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_o}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} L = 5.25\,nF$$

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = 1522\,V$$

¿Cómo cambia el potencial si el radio $R_1 = R_2/2$?

PROBLEMA 10

Dos condensadores de 1µF y 3µF se conectan en serie y la asociación es conectada a una batería de 12 V ¿cuál es el valor de la capacidad equivalente de la asociación? ¿Cuáles son la diferencia de potencial sobre cada condensador y la carga almacenada en cada uno de ellos?

DATOS

$C_1 = 1\,\mu F \quad C_2 - 3\,\mu F \qquad \Delta V = 12V$

$$C_s = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = 0.75\,\mu F$$

$$Q = C_s \cdot \Delta V = 9 \cdot 10^{-6}\,C$$

Cada condensador tiene la misma carga entonces la diferencia de potencial sobre cada uno es

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1} = 9\,V \qquad \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2} = 3\,V$$

PROBLEMA 11

Dos condensadores de 1μ F y 3μ F se conectan en paralelo y la asociación es conectada a una batería de 12 V ¿cuál es el valor de la capacidad equivalente de la asociación? ¿Cuáles son la diferencia de potencial sobre cada condensador y la carga almacenada en cada uno de ellos?

DATOS

$C_1 = 1\,\mu F \quad C_2 = 3\,\mu F \qquad \Delta V = 12\,V$

$$C_p = C_1 + C_2 = 4\,\mu F$$

$$Q_T = C_p \cdot \Delta V = 4.8 \cdot 10^{-5}\,C$$

Sobre cada condensador existe la misma diferencia de potencial entonces la carga en cada uno es

$$Q_1 = C_1\,\Delta V = 1.2 \cdot 10^{-5}\,C \qquad Q_2 = C_2\,\Delta V = 3.6 \cdot 10^{-5}\,C$$

Considerando los resultados de los problemas 10 y 11 ¿cuál asociación almacena más energía?

PROBLEMA 12

Considere el conjunto de condensadores del circuito que se observa en la figura a) Encuentre la capacidad equivalente entre los puntos a y b. b) Determine la carga en cada condensador cuando la diferencia de potencia entre a y b es de 20 V .

$C_3=5\mu F$
a
$C_2=2\mu F$ $C_1=8\mu F$
b
$C_4=2\mu F$

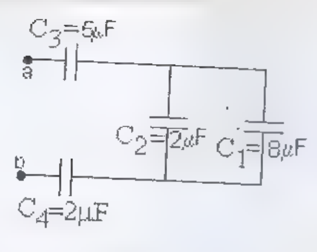


Figura 1

$C_1 = 8\mu F \quad C_2 = 2\mu F \quad C_3 = 5\mu F \quad C_4 = 2\mu F$

Cálculo de la capacidad equivalente

C_1 y C_2 están en paralelo por estar ambos a la misma diferencia de potencial. Entonces

$C_{12} = C_1 + C_2 = 10$ uF

El circuito que reducido como indica la figura 2, en este caso los condensadores, están asociados en serie porque están conectados a lo largo de una única rama del circuito, entonces

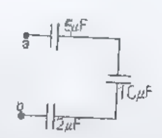


Figura 2

$$C_{eqTOTAL} = \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_{12}}\right)^{-1} = 1.25\mu F$$

Para calcular la carga en cada condensador, partimos de la figura 3, como la diferencia de potencia entre los bornes a y b es 20 V se tiene

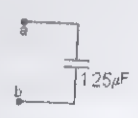


Figura 3

$V_{abv} := 20\,\text{volt} \qquad Q_T := C_{eqTOTAL} \cdot V_{ab} \qquad Q_T = 2.5 \times 10^{-5}\,C$

Q_T es carga sobre el condensador $C_{eqTOTAL}$

En la figura 2 los condensadores están en serie y por lo tanto tienen la misma carga que el condensador $C_{eqTOTAL}$, esto es

$Q_3 = Q_4 = Q_{12} = Q_T$

La diferencia de potencial sobre el condensador C_3 es

$V_3 := \frac{Q_3}{C_3} \qquad V_3 = 5\,V$

La diferencia de potencial sobre el condensador C_4 es

$V_4 := \frac{Q_4}{C_4} \qquad V_4 = 12.5\,V$

La diferencia de potencial sobre el condensador C_{12} es

$V_{12} := \frac{Q_{12}}{C_{12}} \qquad V_{12} = 2.5\,V$

Como la diferencia de potencial sobre C_1 y C_2 es la misma resulta

$Q_1 := C_1 \cdot V_{12} \qquad Q_1 = 2 \times 10^{-5}\,C$

$Q_2 := C_2\, V_{12} \qquad Q_2 = 5 \times 10^{-6}\,C$

[illegible] condensadores C_1 y C_2 se debe recalcular todo?

PROBLEMA 13

Calcular la capacidad de los siguientes circuitos si la capacidad de cada condensador es 1μF.

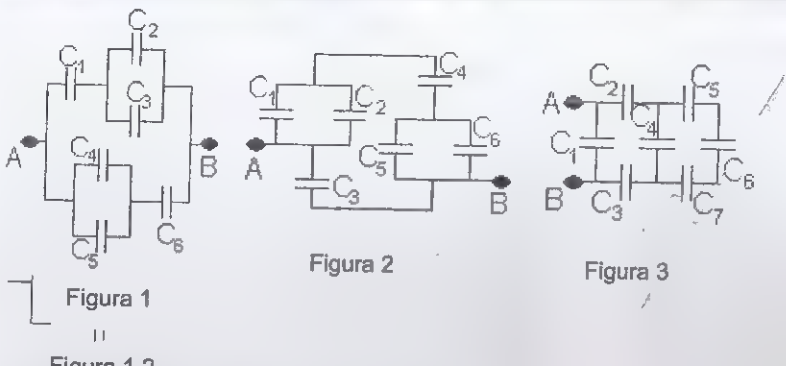


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Figura 1.2

CASO FIGURA 1

Para calcular la capacidad equivalente, primero asociemos en paralelo a C_2 y C_3 por un lado y por otro C_4 y C_5

$C_{23}= C_2 + C_3$ $C_{23} = 2\mu F$ $C_{45}= C_4 + C_5$

$C_{45} = 2\mu F$

El circuito se reduce al de la figura 1.1 donde C_1 y C_{23} están en serie en la rama superior y C_{45} y C_6 en serie en la rama inferior.

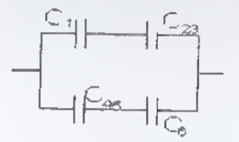


Figura 1.1

$$C_{123} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}}\right)^{-1} = 0.667\mu F$$

$$C_{456} = \left(\frac{1}{C_{45}} + \frac{1}{C_6}\right)^{-1} = 0.667\mu F$$

El circuito resultante está mostrado en la figura 1.2, donde los condensadores están en serie

$$C_{eq} = C_{123} + C_{456} = 1.333\mu F$$

Si el circuito está a 12V, la capacidad equivalente C_6 ¿a qué diferencia de potencial está?

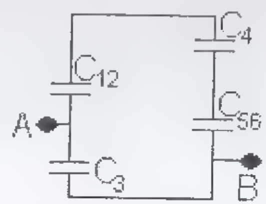
CASO FIGURA 2

Para calcular la capacidad equivalente, primero asociemos en paralelo a C_1 y C_2 por un lado y por otro C_5 y C_6

$C_{12}= C_1 + C_2$ $C_{12} = 2\mu F$

$C_{56}= C_5 + C_6$ $C_{56} = 2\mu F$

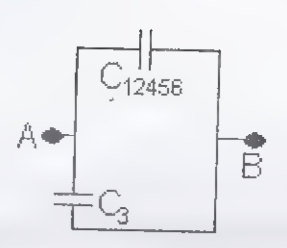
El circuito se reduce al de la figura 2.1 donde C_{12}, C_4 y C_{56} están en serie.



$$C_{12456} = \left(\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_{56}} \right)^{-1} = 0.5\mu F$$

En la figura 2.2 el condensador C_{12456} está en paralelo con C_3

$C_{eq} = C_{2456} + C_3 = 1.5\mu F$



CASO FIGURA 3

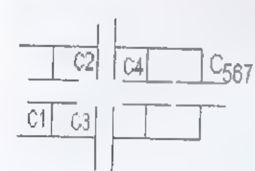


Figura 3.1

Para calcular la capacidad equivalente, primero asociemos en serie a C_5, C_6 y C_7

$$C_{567} = \left(\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_7} \right)^{-1} = 0.333\mu F$$

El circuito se reduce al de la figura 3.1 donde C_4 y C_{567} están en paralelo

$C_{4567} = C_4 + C_{456} = 1.333\mu F$

Figura 3.2

El circuito resultante está mostrado en la figura 3.2, donde los condensadores C_2, C_3 y C_{4567} están en serie

$$C_{234567} = \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{4567}} + \frac{1^*}{C_3} \right)^{-1} = 0.364\mu F$$

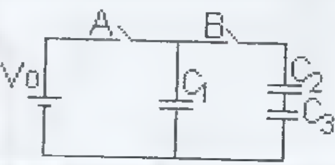
Figura 3. 3

En la figura 3.3 se muestra el circuito reducido, después de la última asociación C_1 y $C_{2..7}$ están en paralelo

$C_{eq} = C_1 + C_{234567} = 1.364\mu F$

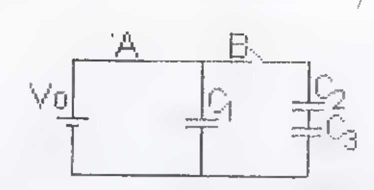
PROBLEMA 14

En el circuito de la figura hay dos interruptores A y B inicialmente ambos están desconectados y todos los condensadores descargados. a) Calcular el valor de la carga sobre C_1 si se cierra el interruptor A y se deja abierto el B. b) Con C_1 cargado, se abre el interruptor A y se cierra B, calcular la carga y la diferencia de potencial en cada condensador. Datos $V_0 = 10$ V, $C_1 = 10^{-6}$ F, $C_2 = 10^{-6}$ F y $C_3 = 2 \cdot 10^{-6}$ F.



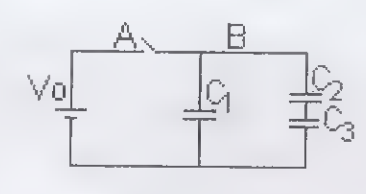
a) Con el interruptor A cerrado y B abierto el condensador C_1 se carga

$$Q_1 = C_1 V_o = 10^{-6} F\ 10\ V = 100\times10^{-3}\ C$$



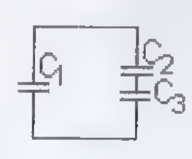
b) Se abre el interruptor A y se cierra el B, la carga inicialmente en C_1 se redistribuye en los otros condensadores hasta que C_1 y la asociación de C_2 y C_3 en serie alcanzan el mismo potencial eléctrico V_F.

Si a la asociación de C_2 y C_3 en serie llamamos C_{23}
Entonces como C_1 y C_{23} están en paralelo por que la diferencia de potencia sobre ellos es la misma se tiene



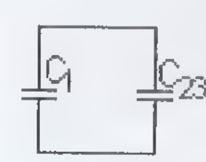
$$V_f = \frac{Q_1}{C_1 + C_{23}} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_{23}}{C_{23}}$$

$$V_f = \frac{Q_1}{C_1 + C_{23}} = \frac{10\times10^{-6} C}{10^{-6} F + 0.66\times10^{-6} F} = 6,0V$$



$$V_F = \frac{q_1}{C_1} \quad \Rightarrow \quad q_1 = C_1 V_F = 10^{-6} F\ \ 6.0V = 6.0\times10^{-6} C$$

$$V_F = \frac{q_{23}}{C_{23}} \quad \Rightarrow \quad q_{23} = C_{23} V_F = 0.66\times10^{-6} F\ \ 6.0V = 4\times10^{-6} C$$



Como C_2 y C_3 están asociados en serie la carga de la asociación es igual a la que se almacenó en cada uno de ellos, entonces la diferencia de potencial sobre C_2 es

$$q_{23} = q_2 \qquad V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{4\times10^{-6} C}{10^{-6} F} = 4V$$

$$q_{23} = q_3 \qquad V_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{4\times10^{-6} C}{2\times10^{-6} F} = 2V$$

PROBLEMA 15

Calcule la energía almacenada en un condensador
   a) Plano
   b) Cilíndrico
   c) Esférico

Se empleará dos formas de calcular la energía:
Expresiones obtenidas de calcular el trabajo para cargar un condensador.

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}$$

A partir de la densidad de energía eléctrica u_E dada por

$$U = \int_{Vol} u_E \, dvol \quad \text{donde } u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$$

---

a) Condensador plano

Área de las placas = A   separación de las placas =d   Capacidad $C = \frac{\varepsilon_o A}{d}$

La energía almacenada es $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o A} d$

La intensidad del campo eléctrico entre las placas $E = \frac{Q}{\varepsilon_o A}$

Entonces, la energía almacenada es

$$U = \int_{Vol}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_o \frac{Q^2}{\varepsilon_o^{\,2} A^2}\right) dvol = \int_0^d \frac{1}{2}\varepsilon_o \frac{Q^2}{\varepsilon_o^{\,2} A^2} A\,dx = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_o A} d$$

Con lo anterior se demuestra que ambas formas son equivalentes

b) Condensador esférico

Radio interior = R_1 Radio exterior = R_2 Capacidad $C = 4\pi\varepsilon_o \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$

La energía almacenada es

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o}\frac{(R_2 - R_1)}{R_2 R_1}$$

c) Condensador cilíndrico

Radio interior = R_1 Radio exterior = R_2 El campo $E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o L}\frac{1}{r}$

La densidad de energía está dada por $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_o \left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_o L}\frac{1}{r}\right)^2$

El volumen $dv = 2\pi r L dr$

La energía almacenada es

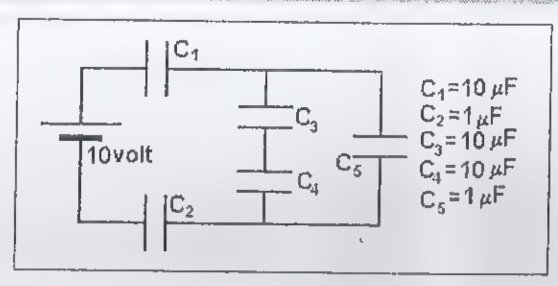
$$U = \int_{Vol} u_E \, dvol = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_o \left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_o L}\frac{1}{r}\right)^2 2\pi r L\,dr = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o L}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o L}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

[illegible]

PROBLEMA 16

a) Calcular la capacidad equivalente del circuito de la figura

b) Si la diferencia de potencial V_b-V_a = 10 volt, determine la carga y la diferencia de potencial sobre cada uno de los condensadores.

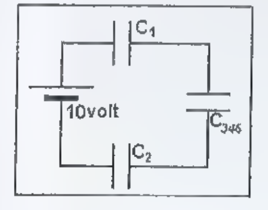


a) Cálculo de la capacidad equivalente

Se asocia en serie C_3 y C_4

$$\frac{1}{C_{34}}=\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_4}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5} \Rightarrow C_{34}=5\mu F$$

Ahora se asocia en paralelo C_{34} y C_5



$$C_{345}=C_{34}+C_5=5\mu F+1\mu F=6\mu F$$

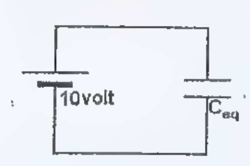
La capacidad equivalente C_{eq} del circuito se obtiene al asociar C_1, C_2 y C_{345} en serie

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_{345}}=\frac{1}{10}+\frac{1}{1}+\frac{1}{6}=\frac{76}{60}\frac{1}{\mu F}$$

$$\Rightarrow \quad C_{eq}=0,7894\mu F$$

b) Cálculo de la carga y diferencia de potencial sobre cada condensador del circuito

La carga del condensador equivalente es



$$Q_{total}=C_{eq}.10\,V=0,7894.10^{-6}F.10\,V=0,7894.10^{-5}\,C$$

Como C_1, C_2 y C_{345} están asociados en serie están cargados con la misma carga igual a la del C_{eq}, es decir

$$Q_1=Q_2=Q_{345}=0,7894.10^{-5}\,C$$

Con lo que se puede calcular las diferencias de potencial:
Sobre el condensador C_1

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{0.789410^{-5}C}{1010^{-6}F} = 0{,}7894V$$

Sobre el condensador equivalente C_{345}

$$V_{345} = \frac{Q_{345}}{C_{345}} = \frac{0{,}7894.10^{-5}C}{6.10^{-6}F} - 1{,}316\ V$$

Sobre el condensador C_2

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{0{,}789.10^{-5}C}{1.10^{-6}F} = 7{,}894\ V$$

Una forma de verificar el resultado anterior es la suma de los tres potenciales debe coincidir con el valor de la fuente

$$V_1 + V_{345} + V_2 = 9{,}99V$$

La diferencia de potencial V_{345} está aplicada sobre la asociación en serie de C_3 y C_4, de modo que es posible calcular la carga sobre esta asociación como

$$Q_{34} = C_{34}V_{345} = 5.10^{-6}F.1{,}316V = 6{,}578.10^{-6}C$$

debido al tipo de asociación entre C_3 y C_4 se cumple

$$Q_{34} = Q_3 = Q_4$$

Por lo tanto, la diferencia de potencial sobre cada uno es

En el condensador C_3 $$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{6{,}578.10^{-6}C}{10.10^{-6}F} = 0{,}658\ V$$

En el condensador C_4 $$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{6{,}578.10^{-6}C}{10.10^{-6}F} = 0{,}658\ V$$

Finalmente sobre el condensador C_5 se conoce la diferencia de potencial V_{345} y entonces se puede calcular la carga del mismo como

$$Q_5 = C_5V_{345} = 1.10^{-6}F1{,}316volt = 1{,}31610^{-6}C$$

Si se modifica la diferencia de potencial de la fuente ¿cambia la capacidad equivalente?

PROBLEMA 17

Calcular la fuerza entre las placas de un condensador plano si el condensador está cargado y aislado

A estar el condensador aislado, significa que la carga es constante, la expresión de la energía es

$$U(x)=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2 x}{\varepsilon_o A} \quad (1)$$

donde x es la separación entre las placas y A su área.
La variación de la energía almacenada debe ser igual al trabajo suministrado por la fuerza externa $-F_x$

$$dU = dW = -F_x\, dx$$

Calculando la fuerza

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_o A}$$

si se multiplica y se divide por $\varepsilon_o A$ y considerando que el módulo del campo eléctrico entre las placas es $E = Q / \varepsilon_o A$ resulta

$$F_x = -\frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 A$$

El signo negativo de la fuerza indica que tiene el sentido contrario al de las x, es decir, hay atracción entre las placas.

En (1) la energía depende de la separación entre las placas, lo que quiere decir que es una energía potencial

PROBLEMA 18

Calcular la fuerza entre las placas de un condensador plano si se considera al condensador conectado a una batería

La diferencia de potencial entre sus placas es constante, la expresión de la variación de la energía está dada por

$$dU = dW + dW_b$$

donde dW es el trabajo mecánico de separar las placas y dW_b es el trabajo efectuado por la batería, el trabajo necesario para mover cada uno de los incrementos de cargas en contra del campo existente es

$$dW_b = -V dQ$$

La energía potencial eléctrica en el condensador está dada por

$$dU = \frac{1}{2} V\, dQ$$

entonces el trabajo será

$$dW = dU - dW_b = -\frac{1}{2} V\, dQ$$

expresando el diferencial de carga en términos de la diferencia de potencial constante y la variación de la capacidad

$$dQ = V\, dC$$

y la variación de la capacidad en función de la variación de la distancia entre las placas

$$dQ = V\,dC = -\frac{V\varepsilon_o\,A\,dx}{x^2}$$

Sustituyendo el diferencial de carga dQ por su expresión resulta

$$dW = -\frac{1}{2}V\,dQ = \frac{V^2\varepsilon_o\,A\,dx}{2x^2}$$

si se calcula la fuerza $F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{V^2\varepsilon_o\,A}{2x^2}$

como E = V / x la expresión de la fuerza será $F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{\varepsilon_o\,E^2\,A}{2}$

El signo negativo de la fuerza indica que es en el sentido contrario al de las x, es decir, hay atracción entre las placas.

¿Cuál es la expresión de la energía?

CAPITULO VIII: DIELÉCTRICOS

PROBLEMA 1

Si se tiene un mol de tetracloruro de carbono CCl_4 - (ε_r = 2.24 a 20 °C, δ= 1.6 g/ cm³) en un campo eléctrico de 10^7 v/m. a) Determine el momento dipolar eléctrico de una molécula. b) Calcule la distancia media entre los centros de cargas.

DATOS $\varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}$ $\varepsilon_r = 2.24$ $\varepsilon = \varepsilon_o \cdot \varepsilon_r$ $\chi_e = \varepsilon_r - 1$

El peso molecular de CCl_4 =156 $M = 156g$ $\delta = 1.6 g/cm^3$ $E = 10^7 \dfrac{V}{m}$

Cálculo del número de moléculas por unidad de volumen

El número de moles es $N_{moles} = \dfrac{Masa}{Peso\ molecular\ en\ g}$

El número de moléculas es $n = N_{moles} \cdot N_{Av} = \dfrac{Masa}{Peso\ molecular\ en\ g} \cdot N_{Av}$

Expresada en términos de la densidad resulta

$$n = \frac{\delta \cdot V}{Peso\ molecular\ en\ g} \cdot N_{Av}$$

entonces el número de moléculas por unidad de volumen

$$N = \frac{n}{V} = \frac{\delta}{Peso\ molecular\ en\ g} \cdot N_{Av} = 6.023 \cdot 10^{23} \frac{\delta}{Peso\ molecular\ en\ g} = 6.177 \cdot 10^{27} \frac{1}{m^3}$$

La intensidad del vector polarización se puede expresar para un medio lineal

$$P(E) = \varepsilon_o \cdot \chi_e \cdot E = 1.097 \cdot 10^{-4} \frac{C}{m^2}$$

El momento dipolar de una molécula $p = \dfrac{P}{N}$

reemplazando $p = \dfrac{P(E)}{N} = \dfrac{\varepsilon_o \cdot \chi_e \cdot E}{N} = 1.776 \cdot 10^{-32} m \cdot C$

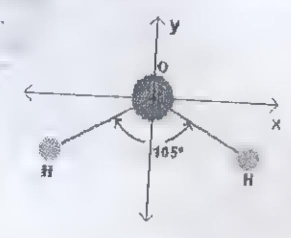
Cálculo de la distancia entre los centros de cargas

Con $q = 72 \cdot q_e$ con $q_e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ $p = q \cdot a$ $\Rightarrow$ $a = \dfrac{p}{q} = 1.542 \cdot 10^{-15} m$

PROBLEMA 2

Una molécula de agua se puede representar como un triángulo isósceles con dos electrones orbitales de carga total –2 e procedentes del oxigeno en su vértice superior y con una carga positiva de +e correspondiente a un núcleo de hidrógeno en cada vértice de la base. La distancia media entre los átomos do hidrógeno y el oxigeno es de 3 2 A y el ángulo superior vale 105°. ¿Cuál es el momento dipolar permanente de la molécula?





DATOS

$q_e = 1.6\ 10^{-19} C$ $\quad a = 3.2A = 3.2\cdot10^{-10} m \quad \theta = 105^o$

$p = 2\ q_e \cdot a \cdot \cos(\theta/2) = 6.234\cdot10^{-29} m\cdot C$

PROBLEMA 3

La molécula de agua tiene un momento dipolar permanente p = 6 2 10-29 C.m .Si se tiene 10-3 mol de agua con todos sus dipolos orientados en la dirección del campo eléctrico de intensidad E= 3 105 N/C. ¿Cuál es el trabajo necesario para rotar los dipolos 90°?

DATOS $\varepsilon_o = 8.85\cdot10^{-12}\dfrac{C^2}{N\cdot m^2} \qquad p_{agua} = 6.2\cdot10^{-29} m\cdot C \qquad E = 3\cdot10^5\dfrac{N}{C}$

El trabajo para rotar una molécula con momento dipolar paralelo al campo (θ = 0) a una orientación θ = π/2 está dado por

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\overline{p}\wedge\overline{E}\right)\cdot\overline{d\theta}$$

$$W = p\cdot E\cdot\int_{\theta_o=0}^{\theta=\pi/2} sen(\theta)\cdot d\theta = 1.86\cdot10^{-23} J$$

Para la muestra $\quad W_{total} = 0.001\cdot6.023\cdot10^{23}\cdot1.86\cdot10^{-23} J = 0.011J$

PROBLEMA 4

Una placa plana de dieléctrico (ε_r = 5) es colocada perpendicular a un campo D uniforme con una intensidad de 1C/m². Si la placa ocupa un volumen de 0.1 m³ y está uniformemente polarizada. Determine la intensidad del vector polarización en la placa y el momento dipolar total de la placa.

DATOS $\quad \varepsilon_o = 8.85\cdot10^{-12}\dfrac{C^2}{N\cdot m^2} \qquad \varepsilon_r = 5 \qquad \varepsilon = \varepsilon_o\cdot\varepsilon_r \qquad \chi_e = \varepsilon_r - 1$

$$D = 1\frac{C}{m^2} \qquad V = 0.1m^3$$

Cálculo del campo eléctrico $E = \frac{D}{\varepsilon} = 2.26\cdot 10^{10}\frac{N}{C}$

La intensidad del vector polarización está dada por $P = \varepsilon_o \cdot \chi_e \cdot E = 0.8\frac{C}{m^2}$

El momento dipolar eléctrico $p = P\cdot V = 0.08\, m\cdot C$

PROBLEMA 5

Una placa delgada de material ($\varepsilon_r = 4$) es colocada perpendicular a un campo eléctrico uniforme. Si la densidad superficial de carga de polarización $\sigma_p = 0.5\ C/m^2$ a) Determine la intensidad del vector polarización b) la intensidad del vector desplazamiento en la placa y fuera de ella c) la intensidad del campo eléctrico en la placa y fuera de ella.

DATOS $\varepsilon_o = 8.85\cdot 10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2}$ $\varepsilon_r = 4$ $\varepsilon = \varepsilon_o\cdot\varepsilon_r$ $\chi_e = \varepsilon_r - 1$ $\sigma_p = 0.5\frac{C}{m^2}$

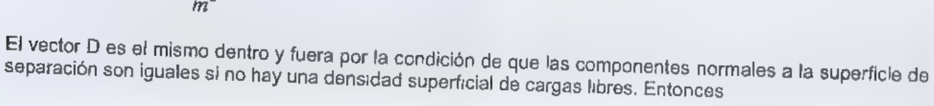
Por la simetría $P = \sigma_p = 0.5\frac{C}{m^2}$

Como $P = \varepsilon_o\cdot\chi_e\cdot E$

El campo eléctrico en el medio es

$$E_m = \frac{P}{\varepsilon_o\cdot\chi_e} = 1.883\cdot 10^{10}\frac{N}{C}$$

$$D_m = \varepsilon\cdot E_m = 0.667\frac{C}{m^2}$$


El vector D es el mismo dentro y fuera por la condición de que las componentes normales a la superficie de separación son iguales si no hay una densidad superficial de cargas libres. Entonces

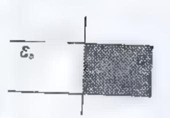
$$D_o = D_m$$

Entonces el campo eléctrico en el exterior es

$$E_o = \frac{D_o}{\varepsilon_o} = 7.533\cdot 10^{10}\frac{N}{C}$$

PROBLEMA 6

Un condensador de placas paralelas dispuesto horizontalmente se llena la mitad derecha con un dieléctrico de permitividad ε mientras que la mitad izquierda se llena con aire (ε_0). La separación entre las placas es d =10 mm y está a una diferencia de potencial de 100 voltios. Hallar la intensidad de los campos E, D y P en ambas mitades, suponer que $\varepsilon = 3\,\varepsilon_0$.



DATOS $\varepsilon_o = 8.85\cdot10^{-12}\dfrac{C^2}{N\cdot m^2}$ $\varepsilon = 3\cdot\varepsilon_o$ $\varepsilon_r = 3$ $\chi_e = \varepsilon_r - 1$

$d = 0.01m$ $V_o = 100V$

En el aire $E_o = \dfrac{V_o}{d} = 10kV/m$ entonces $D_o = \varepsilon_o\cdot E_o = 8.85\cdot10^{-7}C/m^2$

$P_o = 0C/m^2$

En el medio

En la superficie de separación aire - medio dieléctrico deben iguales las componentes tangenciales de los campo eléctricos en los dos medios, en este caso coinciden con el campo total

$$E_m = E_o = 100\frac{kV}{m}$$

$$D_m = \varepsilon\cdot E_m = 1.77\cdot10^{-6}\frac{C}{m^2}$$

$$P = D_m - \varepsilon_o\cdot E_m = 1.77\cdot10^{-6}\frac{C}{m^2}$$

PROBLEMA 7

Un condensador de placas paralelas dispuesto horizontalmente tiene una separación entre las placas igual a 10 mm y está a una diferencia de potencial de 100 V. En su interior hay un dieléctrico de permitividad ε, con un espesor igual a 5 mm apoyado en la placa inferior. El espacio de arriba está lleno de aire (ε_0). a) Determine la intensidad de los campos E, D y P en el espacio lleno de aire y en el medio dieléctrico. b) Hallar la diferencia de potencial como una función de la distancia entre las placas. Suponer que el área de las placas es 0.01 m^2 y $\varepsilon = 3\,\varepsilon_0$.

DATOS $\varepsilon_o = 8.85\cdot10^{-12}\dfrac{C^2}{N\cdot m^2}$ $\varepsilon = 3\cdot\varepsilon_o$ $\varepsilon_r = 3$ $\chi_e = \varepsilon_r - 1$

$d = 0.01m$ $d_o = d/2$ $d_m = d/2$ $V = 100\,volt$

Si las capacidades en cada medio están dadas como

$$C_o = \frac{\varepsilon_o\cdot A}{d_o} = \frac{2\cdot\varepsilon_o\cdot A}{d} \qquad C_m = \frac{\varepsilon\cdot A}{d_m} = \frac{3\cdot\varepsilon_o\cdot A}{d/2} = \frac{6\cdot\varepsilon_o\cdot A}{d}$$

La capacidad total es la asociación en serie de las mismas

$$\frac{1}{C_T}=\frac{1}{C_o}+\frac{1}{C_m}=\frac{d}{2\cdot\varepsilon_o\cdot A}+\frac{d}{6\cdot\varepsilon_o\cdot A}=\frac{2\cdot d}{3\cdot\varepsilon_o\cdot A} \quad\Rightarrow\quad C_T=\frac{3\cdot\varepsilon_o\cdot A}{2\cdot d}$$

La carga entre en las placas $Q=C_T\cdot V=\dfrac{3\cdot\varepsilon_o\cdot A}{2\cdot d}\cdot V$

La densidad superficial de carga libre $\sigma=\dfrac{Q}{A}=\dfrac{3\cdot\varepsilon_o}{2\cdot d}\cdot V$

Entonces la intensidad del vector D_o es $D_o=\sigma$

En el aire $D_o=\dfrac{3\cdot\varepsilon_o}{2\cdot d}\cdot V=1.377\cdot10^{-7}\dfrac{C}{m^2}$

$$E_o=\frac{D_o}{\varepsilon_o}=1.5\cdot10^4\frac{V}{m} \qquad P_o=0\frac{C}{m^2}$$

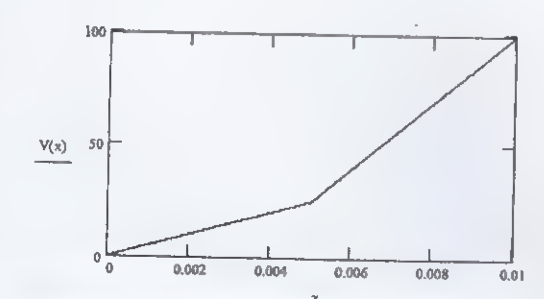
En el medio

En la superficie de separación aire - medio dieléctrico, deben ser iguales las componentes normales de los vectores D en los dos medios, en este caso coinciden con el campo total D

$$D_m=D_o \qquad E_m=\frac{D_m}{\varepsilon}=5\cdot10^3\frac{V}{m} \qquad P=D_m-\varepsilon_o\cdot E_m=8.85\cdot10^{-8}\frac{C}{m^2}$$

Representación gráfica de la diferencia de potencial en función de la posición

$$V(x)=\begin{cases} E_m\cdot x & para\ el\ medio \\ E_o\cdot(x-0.005)+0.005\cdot E_m & para\ el\ aire \end{cases}$$



PROBLEMA 8

¿Cuál es la intensidad de los campos E, D y P a una distancia r = 100 mm de una carga puntual de Q = 1μC en un medio Infinito de a) aire, b) un dieléctrico con $\varepsilon_r = 9$?

DATOS

$$\varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \quad \varepsilon_r = 9 \quad \varepsilon = 9 \cdot \varepsilon_o \qquad \chi_e = \varepsilon_r - 1$$

$$r = 0.1m \qquad Q = 10^{-6} C$$

En el aire

Considerando el enunciado de la ley de Gauss $\int_{SC} \vec{E}\, \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$ (1)

La intensidad del vector del campo eléctrico está dada por

$$E_o = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o \cdot r^2} = 8.992 \cdot 10^5 \frac{N}{C}$$

La intensidad del vector D $D_o = \varepsilon_o \cdot E_o = 7.958 \frac{C}{m^2}$

La intensidad del vector polarización $P_o = 0 \frac{C}{m^2}$

En el medio dieléctrico se cumple $\int_{SC} \vec{D}\, \vec{ds} = Q$

entonces la intensidad del vector D es

$$D = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = 7.958 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

tiene el mismo valor que en el aire.

Para el campo eléctrico $E = \frac{D}{\varepsilon} = 9.99 \cdot 10^4 \frac{N}{C}$

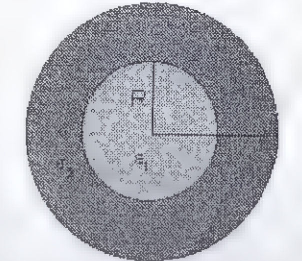
La intensidad del vector polarización $P = \varepsilon_o \cdot \chi_e \cdot E = 7.07 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$

PROBLEMA 9

Una carga puntual ($q = 10^{-6}$ C) está en el centro de una esfera dieléctrica ($\varepsilon_{1r} = 9$) de radio R = 4 cm, la que a su vez se halla rodeada por otro medio dieléctrico ($\varepsilon_{2r} = 4$). Determine la intensidad de los campos E, D y P para r < R y r > R, y la densidad superficial de cargas de polarización en la superficie de separación.

Para r < R y $\varepsilon_{1r} = 9$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_o\, \varepsilon_{1r}$ $\qquad\chi_1 = \varepsilon_{1r} - 1$



En el medio dieléctrico 1 se cumple

$$\int_{SC} \vec{D}_1\, \vec{ds} = q$$

entonces la intensidad del vector D es

$$D_1(r) = \frac{q}{4\cdot\pi\cdot r^2}$$

Para el campo eléctrico $E_1(r) = \dfrac{D_1(r)}{\varepsilon_1}$

La intensidad del vector polarización

$$P_1(r) = \varepsilon_o\, \chi_1\, E_1(r)$$

Para $r > R$ y $\varepsilon_{2r} = 4$

$\varepsilon_2 = \varepsilon_o\, \varepsilon_{2r}$ $\qquad\chi_2 = \varepsilon_{2r} - 1$

En el medio dieléctrico 2 se cumple

$$\int_{SC} \vec{D}_2\, \vec{ds} = q$$

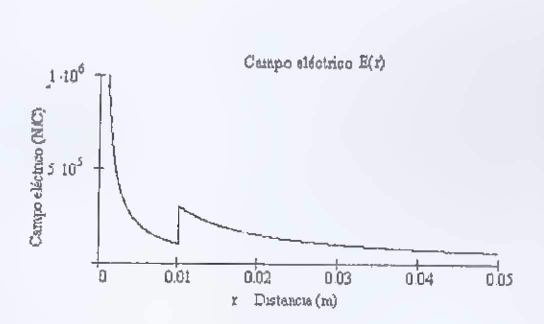
entonces la intensidad del vector D es $D_2(r) = \dfrac{q}{4\cdot\pi\cdot r^2}$

Para el campo eléctrico $E_2(r) = \dfrac{D_2(r)}{\varepsilon_2}$

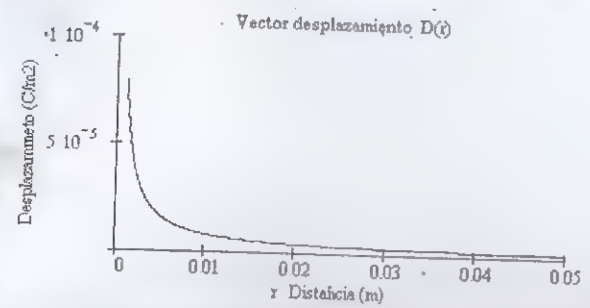
La intensidad del vector polarización $P_2(r) = \varepsilon_o\, \chi_2\, E_2(r)$

Representación gráfica de la intensidad del campo eléctrico

$$E(r) = \begin{cases} E_1(r) = \dfrac{q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_1\cdot r^2} & r \le R \\ \\ E_2(r) = \dfrac{q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_2\cdot r^2} & r > R \end{cases}$$



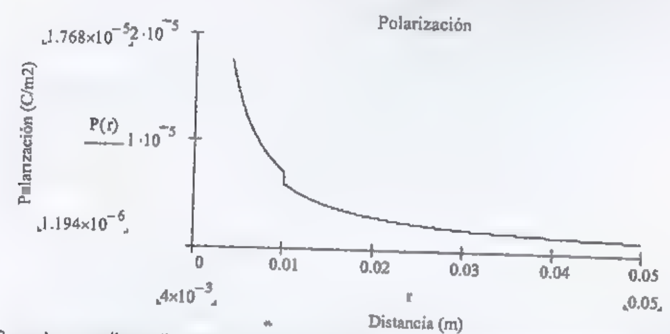
Representación gráfica de la intensidad del vector desplazamiento



No se nota discontinuidad en la intensidad del vector desplazamiento en función de r

Representación gráfica de la intensidad del vector Polarización

$$P(r)=\begin{cases}\varepsilon_o\cdot\chi_1\cdot E_1(r) & para \quad r\le R\\ \varepsilon_o\cdot\chi_2\cdot E_2(r) & para \quad r>R\end{cases}$$

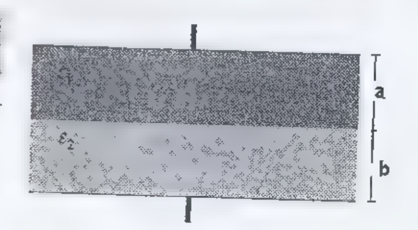


Se nota una discontinuidad en la transición entre los medios en la intensidad del vector polarización en función de r debido a una densidad de carga de polarización

La densidad de carga de polarización $\sigma_P = P_2(r=0.01m)-P_1(r=0.01m)=-1.105\cdot10^{-6}\,\frac{C}{m^2}$

PROBLEMA 10

En un condensador de placas paralelas se colocan dos medios dieléctricos (1 y 2) como muestra la figura determine el valor de la capacidad.



El vector desplazamiento

$$D_1=\frac{Q}{A} \quad (1)$$

donde Q es la carga libre y A es el área de la placa del condensador plano

La componente normal del vector D es la misma en

los dos medios.

$$D_1 = D_2$$

es decir, que se cumple

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} \qquad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} \qquad (2)$$

$$\varepsilon_1 \cdot E_1 = \varepsilon_2 \cdot E_2$$

La capacidad está definida como $C = \dfrac{Q}{V}$

Entonces la diferencia de potencial entre las placas está dado por

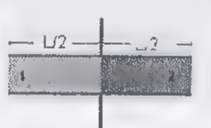
$$V = E_1 \cdot a + E_2 \cdot b$$

donde a es el espesor de la placa del dieléctrico 1 y b del dieléctrico 2

$$C = \frac{D \cdot A}{E_1 \cdot a + E_2 \cdot b} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot A}{a \cdot \varepsilon_2 + b \cdot \varepsilon_1}$$

PROBLEMA 11

En un condensador de placas cuadradas paralelas de lado L se colocan dos medios dieléctricos (ε_1 y ε_2) como muestra la figura determine el valor de la capacidad.



Ambos medios están a la misma diferencia de potencial y la capacidad de cada uno viene dada por

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 L(L/2)}{d} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_2 L(L/2)}{d}$$

donde L representa el lado de la placa. La capacidad resulta

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1 L(L/2)}{d} + \frac{\varepsilon_2 L(L/2)}{d} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{L(L/2)}{d}$$

PROBLEMA 12

Un cable coaxial tiene una capacidad de 75 pF/m, su conductor externo un diámetro interno 0.9 cm y está lleno de polietileno (ε_r = 2.2) ¿Cuál es el diámetro del conductor interno?

$$\varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \qquad \varepsilon_r = 2.2 \qquad \varepsilon = 2.2 \cdot \varepsilon_o \qquad C = 75\frac{pF}{m} \qquad R_2 = \frac{0.009}{2} m$$

En el problema 2 del capitulo 5 se obtuvo la expresión de la capacidad de un condensador cilíndrico

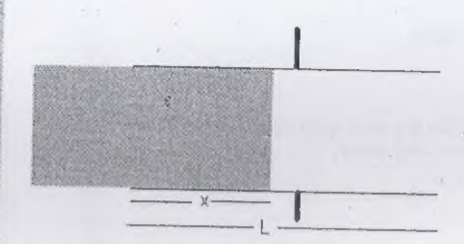
$$C=\frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$$ con R1 > R2 despejando R1 se tiene $R_1=R_2\cdot e^{\left(\frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}{C}\right)}=0.023\,m$

El diámetro es d = 2 R_1 = 0.046 m

PROBLEMA 13

En un condensador plano de placas cuadradas de lado L y separación d, se introduce una placa de dieléctrico de constante ε una distancia x dentro del mismo. Como muestra la figura.

a) Encuentre la capacidad equivalente.
b) Calcule la energía almacenada en el condensador si la diferencia de potencial es V
c) Encuentre la magnitud y sentido de la fuerza ejercida sobre el dieléctrico, suponiendo que la diferencia de potencial se mantuvo constante y no se tiene en cuenta los efectos de los extremos.



a) Capacidad equivalente

Lado con dieléctrico $C_1=\frac{\varepsilon\cdot L\cdot x}{d}$

Lado con aire $C_o=\frac{\varepsilon_o\cdot L\cdot(L-x)}{d}$

$$C_T=C_1+C_o=\frac{\varepsilon\cdot L\cdot x}{d}+\frac{\varepsilon_o\cdot L\cdot(L-x)}{d}=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_o)\cdot L\cdot x}{d}+\frac{\varepsilon_o\cdot L^2}{d}$$

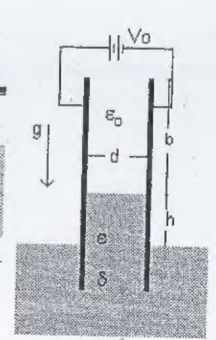
b) La energía almacenada en el condensador $U=\frac{1}{2}C\cdot V^2=\frac{1}{2}\left[\frac{(\varepsilon-\varepsilon_o)\cdot L\cdot x}{d}+\frac{\varepsilon_o\cdot L^2}{d}\right]\cdot V^2$

c) La fuerza sobre la placa de dieléctrico es $F=\left(\frac{d}{dx}U\right)_V=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_o)L\,V^2}{2d}$

la fuerza está en el sentido de las x creciente.

PROBLEMA 14

Un condensador placas cuadradas de lado L, paralelas y separación d a una diferencia de potencial Vo se sumerge en un fluido dieléctrico de permitividad ε. El fluido tiene una densidad δ la gravedad actúa hacia abajo.¿ A qué altura sube el fluido entre los electrodos?



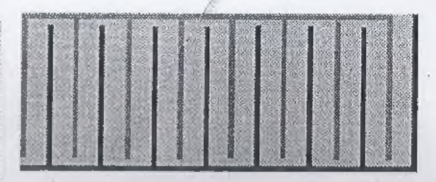
Empleando el resultado del problema 12, en este caso la fuerza eléctrica es hacia arriba entonces

$$\vec{F}_e - m\vec{g} = 0 \qquad \text{con} \quad m = \delta V = \delta h b$$

$$\frac{(\varepsilon - \varepsilon_o) L V_o^2}{2d} = g\delta h d L \quad \Rightarrow h = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_o) V_o^2}{2g\delta d^2}$$

PROBLEMA 15

Un condensador está construido mediante el intercalado de placas planas como muestra la figura. La separación entre las placas adyacentes es 0.5 cm y el área efectiva de las placas es de 5 cm^2. Ignorando los efectos de bordes, Calcule la capacidad de la unidad, considerando que entre placas existe un dieléctrico de constante dieléctrica relativa $\varepsilon_r = 2$.



La asociación entre placas adyacentes está construida para que están se mantengan a la misma diferencia de potencial, por lo tanto es una asociación en paralelo de condensadores de placas paralelas.

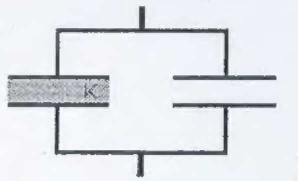
La capacidad entre placas adyacentes es: $C = \dfrac{\varepsilon_o \varepsilon_r A}{d}$

donde A es el área efectiva de las placas y d la separación entre placas adyacentes. La capacidad total es

$$C_{TOTAL} = N C = N\frac{\varepsilon_o \varepsilon_r A}{d} = 26.55\,pF \quad \text{con N=15}$$

PROBLEMA 16

Dos condensadores iguales están conectados en paralelo, cargados a una diferencia de potencial V_1 y después se los aísla de la fuente. Se introduce un dieléctrico de constante ε en uno de los condensadores de modo que llene completamente el espacio entre las placas . Calcular la cantidad de carga verdadera que pasa de un condensador al otro y la diferencia de potencial final V_2 en los condensadores en función de C, V_1 y ε



La carga sobre cada condensador está dada por $Q_1 = C\,V_1$ la carga total $Q_T = 2\,C\,V_1$

Cuando se introduce el dieléctrico de constante ε, la capacidad cambia a $C_2 = (\varepsilon / \varepsilon_o)\,C = \varepsilon_r\,C$, entonces la capacidad equivalente ahora es

$C_E = C + C_2 = (1 + \varepsilon_r)\,C$

La diferencia de potencial es $V_2 = \dfrac{Q_T}{C_E} = \dfrac{2CV_1}{(1+\varepsilon_r)C} = \dfrac{2V_1}{1+\varepsilon_r}$

La carga sobre el condensador con dieléctrico es $Q_2 = C_2 V_2 = \varepsilon_r C \dfrac{2V_1}{1+\varepsilon_r} = \dfrac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} C V_1$

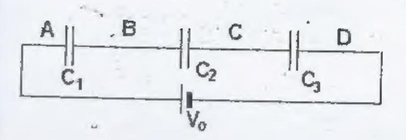
La carga sobre el condensador sin dieléctrico es $Q' = C V_2 = C\dfrac{2V_1}{1+\varepsilon_r} = \dfrac{2}{1+\varepsilon_r} C V_1$

La cantidad de carga verdadera que pasa de un condensador a otro es

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} CV_1 - CV_1 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} CV_1$$

PROBLEMA 17

Se conectan en serie tres condensadores idénticos con aire entre sus placas y luego se une el conjunto a una bateria de 6 V, como se muestra la figura. A continuación se llenan los condensadores C_1 y C_2 con liquidos de constantes dieléctricas relativas $K_1 = \varepsilon_1/\varepsilon_o$ y $K_2 = \varepsilon_2/\varepsilon_o$ respectivamente. Las diferencia de potencial finales en estos condensadores son $\Delta V_{AB} = 1$ V y $\Delta V_{BC} = 2$ V. Hallar K_1 y K_2



Suponemos condensadores de placas paralelas de área A y separación entre las placas d con aire entonces su capacidad es $C_o = \frac{\varepsilon_o \cdot A}{d}$ (1)

Si estuvieran cargado con un liquido de constante dieléctrica K su capacidad seria

$$C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d} = \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_o}\frac{\varepsilon \cdot A}{d} = K\frac{\varepsilon_o \cdot A}{d} = K \cdot C_o \qquad \Rightarrow K = \frac{C}{C_o} \quad (2)$$

Cuando los condensadores se conectan en serie se cumple que todos se cargas al mismo valor de carga Q y la suma de las diferencias de potencial que tiene cada uno coincide para este caso con V_o

Entonces $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$ (3) y $\Delta V_{AB} + \Delta V_{BC} + \Delta V_{CD} = V_o$ (4)

De (4) $\Delta V_{CD} = V_o - \Delta V_{AB} + \Delta V_{BC} = 6V - 1V - 2V = 3V$

La capacidad de C_3 (con aire) viene dada por $C_3 = C_o = \frac{Q}{\Delta V_{CD}}$ (5)

La capacidad de C_1 $\quad C_1 = \frac{Q}{\Delta V_{AB}}$ (6)

Despejando la carga de (3) $\quad Q = C_o \cdot \Delta V_{CD}$ y reemplazando en (6)

$$C_1 = C_o\frac{\Delta V_{CD}}{\Delta V_{AB}} \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{C_1}{C_o} = \frac{\Delta V_{CD}}{\Delta V_{AB}} = 3$$

La capacidad de C_2 $\quad C_2 = \frac{Q}{\Delta V_{BC}}$ (7)

Despejando la carga de (3) $\quad Q = C_o \cdot \Delta V_{CD}$ y reemplazando en (7)

$$C_2 = C_o\frac{\Delta V_{CD}}{\Delta V_{BC}} \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{C_2}{C_o} = \frac{\Delta V_{CD}}{\Delta V_{BC}} = 1.5$$

CAPITULO IX: CORRIENTE ELECTRICA. LEY DE OHM

PROBLEMA 1

Una barra de cobre de sección transversal rectangular de 20 por 80 mm y largo 2 m tiene aplicada una diferencia de potencial de 50 mV entre sus extremos. Hallar las siguientes cantidades y dar las unidades en cada caso: a) la resistencia R de la barra, b) la corriente, I c) la densidad de corriente J, d) el campo eléctrico E, e) la potencia perdida P en la barra, f) la energía perdida W por hora, g) la velocidad de deriva de los portadores de carga.

Datos

$\rho_{cu} = 1.6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m \qquad Vo = 0.05V \quad L_a = 0.02m \quad L_b = 0.08m \quad L_c = 2m$

a) Resistencia

$$R = \frac{\rho_{cu} \cdot L_c}{L_a \cdot L_b} = 2 \cdot 10^{-5} \Omega$$

b) Corriente

$$I = \frac{Vo}{R} = 2.5 \cdot 10^3 A$$

c) La densidad de corriente $\quad J = \dfrac{I}{L_a \cdot L_b} = 1.563 \cdot 10^6 \dfrac{A}{m^2}$

d) El campo eléctrico $\quad J = \dfrac{E}{\rho_{cu}} \quad \Rightarrow \quad E = \rho_{cu} \cdot J = 0.025 \dfrac{V}{m}$

e) La potencia perdida P en la barra $\quad P = I^2 \cdot R = 125V$

f) La energía perdida W por hora, $\quad E = P\,t = 4.5\ 10^5$ J

g) La velocidad de deriva de los portadores de carga.

$q_e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ El peso molecular de Cu =29 $\quad M = 29\,g \qquad \delta = 8.96 \dfrac{g}{cm^3}$

El número de moléculas por unidad de volumen

$$N = 6.023 \cdot 10^{23} \cdot \frac{\delta}{M} = 1.861 \cdot 10^{29} \frac{1}{m^3}$$

Como la corriente puede escribirse $\quad I = N \cdot q_e \cdot v \cdot A \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{I}{N \cdot q_e \cdot A} = 5.248 \cdot 10^{-5} \dfrac{m}{s}$

¿Qué relación existe entre la diferencia de potencial y la velocidad de deriva de los portadores de cargas?
